ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

УЧЕБНИК
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

3-е издание, переработанное и дополненное

Под редакцией профессора **Н. Ш. Кремера**

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

ВЫБОР ВУЗОВ РОССИИ 2013

ВЫБОР ВУЗОВ РОССИИ 2014

ВЫБОР ВУЗОВ РОССИИ 2015

Москва ▪ Юрайт ▪ 2018

УДК 33(075.8)
ББК 65в6я73
И85

***Авторы*:**

Кремер Наум Шевелевич — профессор (предисловие, введение, гл. 1—3, 6, 8—11, 13—15);

Путко Борис Александрович — доцент (гл. 4, 16);

Тришин Иван Михайлович — доцент (гл. 7);

Фридман Мира Нисоновна — доцент (гл. 5, 12).

***Рецензенты*:**

кафедра прикладной математики Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (заведующая кафедрой, профессор — *Мастяева И. Н.*);

Подиновский В. В. — доктор технических наук, профессор Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

И85 **Исследование операций в экономике** : учебник для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 438 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-9916-9922-8

В учебнике представлены модели линейного и целочисленного программирования, классические методы оптимизации, задачи выпуклого и динамического программирования, модели управления запасами и сетевого планирования и управления, элементы теории игр и массового обслуживания, оптимизация финансового портфеля. Приводится большое количество экономических задач с решениями и для самостоятельной работы.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов, бакалавров, магистров и аспирантов экономических вузов, преподавателей, экономистов и лиц, обучающихся по программам MBA, второго высшего образования и проходящих профессиональную переподготовку или повышение квалификации.

УДК 33(075.8)
ББК 65в6я73

ISBN 978-5-9916-9922-8

Оглавление

РАЗДЕЛ II. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Предисловие

Данное пособие написано в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов в области математики к подготовке специалистов и бакалавров вузов по экономическим специальностям и направлениям.

Исследование операций — комплексная научная дисциплина, имеющая важное методологическое значение в системе подготовки современного экономиста. В ней наиболее четко реализуется одна из основных идей изучения курса математики в экономическом вузе — *идея математического моделирования экономических процессов*.

Изучение представленного в пособии учебного материала будет способствовать формированию общекультурных и профессиональных *компетенций*, предусмотренных Федеральными государственными образовательными стандартами (ФГОС-03) по направлениям экономики и управления, таких как: *владение* культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения; *способность* осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач; *способность* выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты; *умение* использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования и другие.

Согласно ФГОС-03 по направлениям экономики и управления в результате изучения дисциплины «Исследование операций» обучающийся должен: ***знать*** основные понятия линейного и нелинейного программирования, теории игр и массового обслуживания, управления запасами и сетевого планирования и управления, используемые в экономических исследованиях; ***уметь*** применять основные оптимизационные методы и строить математические модели объектов профессиональной деятельности; ***владеть*** навыками применения математического инструментария исследования операций для решения прикладных (экономических) задач.

Пособие содержит три раздела.

В разделе I (гл. 1—7) рассмотрены модели *линейного программирования* — постановка и примеры типовых задач, теоретические основы, теория двойственности, симплексный и распределительный методы решения задач. В гл. 8 представлены методы *целочисленного линейного программирования*, в частности методы Гомори и ветвей и границ.

Раздел II посвящен моделям *нелинейного программирования*. В гл. 9 описываются *классические методы оптимизации*: методы нахождения условного экстремума функции нескольких переменных и, в частности, метод множителей Лагранжа. В гл. 10 приводятся модели *выпуклого программирования* с использованием методов кусочно-линейной аппроксимации и градиентных методов, а в гл. 11 — модели *динамического программирования*, используемые при решении таких актуальных задач, как задача об оптимальном распределении инвестиций между предприятиями, ресурсов между отраслями за ряд лет, задача о замене оборудования.

В разделе III рассмотрены специальные модели исследования операций: в гл. 12 — *модели конфликтных ситуаций и игры с природой*, в гл. 13 — *модели управления запасами*, в гл. 14 — *модели сетевого планирования и управления*, в гл. 15 — *задачи массового обслуживания*. Эти модели, весьма отличные друг от друга по своей содержательной постановке, представляют основные, типичные классы задач исследования операций.

В разделе IV рассмотрена *оптимизация финансового портфеля*. Включение данного материала связано с возросшей актуальностью моделей финансового рынка, получивших толчок в развитии в связи с ростом вычислительных возможностей, появлением новых и обновлением действующих компьютерных программ.

В пособии содержится большое количество задач. Задачи с решениями представлены на протяжении всего изложения учебного материала, а задачи для самостоятельной работы приведены в конце каждой главы в «Упражнениях» (нумерация задач единая — начинается в основном тексте главы и продолжается в этом разделе).

Третье издание приведено в соответствие с ФГОС-3 — выделены компетенции, знания и умения, приобретаемые студентами в процессе изучения дисциплины «Исследование операций» по направлениям экономики и управления. Существенно расширена гл. 16 «Оптимизация финансового рынка». Исправлены замеченные опечатки и неточности.

Авторы выражают большую благодарность рецензентам — проф. И. Н. Мастяевой и проф. В. В. Подиновскому за рецензирование рукописи и сделанные ими замечания.

В книге знаком ❒ обозначается начало доказательства теоремы, ■ — ее окончание, знаком ▷ — начало условия задачи, ▶ — окончание ее решения.

Введение

Исследование операций — научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.

Управление любой системой реализуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Их знание помогает найти условия, необходимые и достаточные для осуществления данного процесса. Для этого все параметры, характеризующие процесс и внешние условия, должны быть количественно определены, измерены. Следовательно, цель исследования операций — *количественное обоснование принимаемых решений по организации управления*.

При решении конкретной задачи управления применение методов исследования операций предполагает:

- построение экономических и математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;
- изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия.

Примерами задач исследования операций, отражающих его специфику, могут служить следующие задачи.

Задача 1. Для обеспечения высокого качества выпускаемых изделий на заводе организуется система выборочного контроля. Требуется выбрать такие формы его организации — например, назначить размеры контрольных партий, указать последовательность контрольных операций, определить правила отбраковки, — чтобы обеспечить необходимое качество при минимальных расходах.

Задача 2. Для реализации определенной партии сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать параметры сети — число точек, их размещение, количество персонала — так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.

Задача 3. К заданному сроку необходимо провести массовое медицинское обследование группы населения с целью выявления определенных заболеваний. На обследование выделены материальные средства, оборудование, персонал. Требуется разработать такой план обследования: установить число медпунктов, их размещение, вид и количество анализов, чтобы выявить как можно больший процент числа заболевших.

Необходимо отметить также задачи об использовании ресурсов (планирования производства), о смесях, об использовании мощностей (загрузке оборудования), о раскрое материалов (параграф 1.2), транспортную задачу (параграф 7.1) и др., в которых требуется найти решение, когда некоторый *критерий эффективности* (например, прибыль, выручка, затраты ресурсов и т.п.) принимает максимальное или минимальное значение.

Приведенные задачи относятся к разным областям практики, но в них есть общие черты: в каждом случае речь идет о каком-то *управляемом мероприятии (операции)*, преследующем определенную *цель*. В задаче 1 — это организация выборочного контроля с целью обеспечения качества выпускаемой продукции; в задаче 2 — организация временных торговых точек с целью проведения сезонной распродажи; в задаче 3 — массовое медицинское обследование с целью определения процента заболевших. В каждой задаче заданы некоторые *условия* проведения этого мероприятия, в рамках которых следует принять *решение,* такое, чтобы мероприятие принесло определенную выгоду. Условиями проведения операции в каждой задаче оказываются средства, которыми мы располагаем: время, оборудование, технологии, а решение в задаче 1 заключается в выборе формы контроля — размера контрольных партий, правил отбраковки; в задаче 2 — в выборе числа точек размещения, количества персонала; в задаче 3 — в выборе числа медпунктов, вида и количества анализов.

Следует усвоить основные понятия и определения исследования операций.

Операция — любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели. Результат операции зависит от способа ее проведения, организации, иначе — от выбора некоторых параметров.

Всякий определенный выбор параметров называется *решением. Оптимальными* считают те решения, которые по тем или иным соображениям предпочтительнее других. Поэтому *основной задачей исследования операций является предварительное количественное обоснование оптимальных решений*.

Замечание 1. Следует обратить внимание на постановку проблемы: само *принятие решений* выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица или группы лиц, которые могут учитывать и другие соображения, отличные от математически обоснованных.

Замечание 2. Если в одних задачах исследования операций (например, в параграфе 1.2) оптимальным является решение, при котором выбранный критерий эффективности принимает максимальное или минимальное значение, то в других задачах это вовсе не обязательно. Так, в задаче 2 оптимальным можно считать такое количество торговых точек и персонала в них, при котором среднее время обслуживания покупателей не превысит, например, 5 мин, а длина очереди в среднем в любой момент окажется не более 3 человек.

Модель и эффективность операций. Для применения количественных методов исследования требуется построить *математическую модель операции*. При построении модели операция, как правило, упрощается, схематизируется, и схема операции описывается с помощью того или иного математического аппарата. *Модель операции* — это достаточно точное описание операции с помощью математического аппарата (различного рода функций, уравнений, систем уравнений и неравенств и т.п.). Составление модели операции требует понимания сущности описываемого явления и знания математического аппарата.

Эффективность операции — степень ее приспособленности к выполнению задачи — количественно выражается в виде критерия эффективности — целевой функции. Например, в задаче об использовании ресурсов критерий эффективности — прибыль от реализации произведенной продукции, которую нужно максимизировать, в транспортной задаче — суммарные затраты на перевозку грузов от поставщиков к потребителям, которые нужно минимизировать. Выбор критерия эффективности определяет практическую ценность исследования. Неправильно выбранный критерий может принести вред, ибо операции, организованные под углом зрения такого критерия эффективности, приводят порой к неоправданным затратам. Достаточно вспомнить пресловутый «вал» в качестве основного критерия хозяйственной деятельности предприятия.

Общая постановка задачи исследования операции. В дальнейшем важно усвоить методологию построения моделей задач исследования операций. Все факторы, входящие в описание операции, можно разделить на две группы:

- постоянные факторы (условия проведения операции), на которые мы влиять не можем. Обозначим их через $\alpha_1, \alpha_2, ...$;
- зависимые факторы (элементы решения) $x_1, x_2, ...$, которые в известных пределах мы можем выбирать по своему усмотрению.

Например, в задаче об использовании ресурсов (см. параграф 1.2) к постоянным факторам следует отнести запасы ресурсов каждого вида, производственную матрицу, элементы которой определяют расход сырья каждого вида на единицу выпускаемой продукции каждого вида. Элементы решения — план выпуска продукции каждого вида.

Критерий эффективности, выражаемый некоторой функцией, называемой *целевой*, зависит от факторов обеих групп, поэтому целевую функцию Z можно записать в виде

$$Z = f(x_1, x_2, ..., \alpha_1, \alpha_2, ...).$$

Все модели исследования операций могут быть классифицированы в зависимости от природы и свойств операций, характера решаемых задач, особенностей применяемых математических методов.

Следует отметить прежде всего большой *класс оптимизационных моделей*. Такие задачи возникают при попытке оптимизировать планирование и управление сложными системами, в первую очередь экономическими системами. ***Оптимизационную задачу*** можно сформулировать в общем виде: *найти переменные* $x_1, x_2, ..., x_n$, *удовлетворяющие системе неравенств (уравнений)*

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m \tag{0.1}$$

и *обращающие в максимум (или минимум) целевую функцию*, т.е.

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min). \tag{0.2}$$

Условия неотрицательности переменных, если они есть, входят в ограничения (0.1).

Как известно, упорядоченная совокупность значений n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ представляется точкой n-мерного пространства. В дальнейшем эту точку будем обозначать $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а само оптимальное решение $X^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$.

Рассмотрим еще одну задачу, характерную для исследования операций, — *классическую задачу потребления*, имеющую важное значение в экономическом анализе.

Пусть имеется n видов товаров и услуг, количества которых (в натуральных единицах) $x_1, x_2, ..., x_n$ по ценам соответственно $p_1, p_2, ..., p_n$ за единицу. Суммарная стоимость этих товаров и услуг составляет $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Уровень потребления Z может быть выражен некоторой функцией $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, называемой *функцией полезности. Необходимо найти такой набор товаров и услуг* $x_1, x_2, ..., x_n$ *при данной величине доходов* I, чтобы *обеспечить максимальный уровень потребления*, т.е.

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \qquad (0.3)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le I, \qquad (0.4)$$

$$x_i \ge 0 \ \ (i = 1, 2, ..., n). \qquad (0.5)$$

Решения этой задачи, зависящие от цен $p_1, p_2, ..., p_n$ и величины дохода I, называются *функциями спроса*.

Очевидно, что рассмотренная задача потребления (0.3)—(0.5) так же, как и многие другие (см., например, параграф 1.2), является частным случаем сформулированной выше общей задачи (0.1)—(0.2) на определение экстремума функции n переменных при некоторых ограничениях, т.е. задачей на *условный экстремум*.

В тех случаях, когда функции f и φ_i в задаче (0.1)—(0.2) хотя бы дважды дифференцируемы, можно применять *классические методы оптимизации*. Однако применение этих методов в исследовании операций весьма ограничено, так как задача определения условного экстремума функции n переменных технически весьма трудна: метод дает возможность определить локальный экстремум, а из-за многомерности функции определение ее максимального (или минимального) значения (глобального экстремума) может оказаться весьма трудоемким, тем более, что этот экстремум возможен на границе области решений. Классические методы вовсе не работают, если множество допустимых значений аргумента дискретно или функция Z задана таблично. В этих случаях для решения задачи (0.1)—(0.2) применяются методы *математического программирования*.

Если критерий эффективности $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (0.2) представляет линейную функцию, а функции $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ в системе ограничений (0.1) также линейны, то такая задача является задачей *линейного программирования*. Если исходя из содержательного смысла ее решения должны быть целыми числами, то эта задача *целочисленного линейного программирования*. Если критерий эффективности и (или) система ограничений задаются нелинейными функциями, то имеем задачу *нелинейного программирования*. В частности, если указанные функции обладают свойствами выпуклости, то полученная задача является задачей *выпуклого программирования*.

Если в задаче математического программирования имеется переменная времени и критерий эффективности (0.2) выражается не в явном виде как функция переменных, а косвенно — через уравнения, описывающие протекание операций во времени, то такая задача является задачей *динамического программирования*.

Если критерий эффективности (0.2) и система ограничений (0.1) задаются функциями вида $c \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$, то имеем задачу *геометрического программирования*. Если функции f и (или) φ_i в выражениях (0.2) и (0.1) зависят от параметров, то получаем задачу *параметрического программирования*, если эти функции носят случайный характер — задачу *стохастического программирования*. Если точный оптимум найти алгоритмическим путем невозможно из-за чрезмерно большого числа вариантов решения, то прибегают к методам *эвристического программирования*, позволяющим существенно сократить просматриваемое число вариантов и найти если не оптимальное, то достаточно хорошее, удовлетворительное с точки зрения практики решение.

Из перечисленных методов математического программирования наиболее распространенным и разработанным является линейное программирование. В его рамки укладывается широкий круг задач исследования операций.

По своей содержательной постановке множество других типичных задач исследования операций может быть разбито на ряд классов.

Задачи сетевого планирования и управления рассматривают соотношения между сроками окончания крупного комплекса операций (работ) и моментами начала всех операций комплекса. Эти задачи состоят в нахождении минимальной продолжительности комплекса операций, оптимального соотношения величин стоимости и сроков их выполнения.

Задачи массового обслуживания посвящены изучению и анализу систем обслуживания с очередями заявок или требований и состоят в определении показателей эффективности работы систем, их оптимальных характеристик, например в определении числа каналов обслуживания, времени обслуживания и т.п.

Задачи управления запасами состоят в отыскании оптимальных значений уровня запасов (точек заказа) и размеров заказа. Особенность таких задач заключается в том, что с увеличением уровня запасов, с одной стороны, увеличиваются затраты на их хранение, но, с другой стороны, уменьшаются потери вследствие возможного дефицита запасаемого продукта.

Задачи распределения ресурсов возникают при определенном наборе операций (работ), которые необходимо выполнять при ограниченных наличных ресурсах, и требуется найти оптимальные распределения ресурсов между операциями или состав операций.

Задачи ремонта и замены оборудования актуальны в связи с износом и старением оборудования и необходимостью его замены с течением времени. Задачи сводятся к определению оптимальных сроков, числа профилактических ремонтов и проверок, а также моментов замены оборудования модернизированным.

Задачи составления расписания (календарного планирования) состоят в определении оптимальной очередности выполнения операций (например, обработки деталей) на различных видах оборудования.

Задачи планировки и размещения состоят в определении числа и места размещения новых объектов с учетом их взаимодействия с существующими объектами и между собой.

Задачи выбора маршрута, или *сетевые* задачи, чаще всего встречаются при исследовании разнообразных задач на транспорте и в системе связи и состоят в определении наиболее экономичных маршрутов.

Среди моделей исследования операций особо выделяются модели принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях, изучаемые *теорией игр*. К конфликтным ситуациям, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные цели, можно отнести ряд ситуаций в области экономики, права, военного дела и т.п. В задачах теории игр необходимо выработать рекомендации по разумному поведению участников конфликта, определить их оптимальные стратегии.

В пособии нашли отражение основные из приведенных видов задач исследования операций.

На практике в большинстве случаев успех операции оценивается не по одному, а сразу по нескольким критериям, одни из которых следует максимизировать, другие — минимизировать. Математический аппарат может принести пользу и в случаях *многокритериальных задач исследования операции*, по крайней мере помочь отбросить заведомо неудачные варианты решений.

Для того чтобы из множества критериев, в том числе и противоречащих друг другу (например, прибыль и расход), выбрать целевую функцию, необходимо установить *приоритет* критериев. Обозначим критерии $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ (здесь x — условный аргумент). Пусть они расположены в порядке убывания приоритетов. В зависимости от определенных условий возможны в основном два варианта:

- в качестве целевой функции выбирается критерий $f_1(x)$, обладающий наиболее высоким приоритетом;
- рассматривается комбинация

$$f(x) = \omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x) + ... + \omega_n f_n(x), \tag{0.6}$$

где $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ — некоторые коэффициенты (веса).

Величина $f(x)$, учитывающая в определенной степени все критерии, выбирается в качестве целевой функции.

В условиях определенности ω_i — числа, $f_i(x)$ — функции. В условиях неопределенности $f_i(x)$ могут оказаться случайными и вместо $f(x)$ в качестве целевой функции следует рассматривать математическое ожидание суммы (0.6).

Попытка сведения многокритериальной задачи к задаче с одним критерием эффективности (целевой функцией) в большинстве случаев не дает удовлетворительных результатов. Другой подход состоит в отбрасывании («выбраковке») из множества допустимых решений заведомо неудачных решений, уступающих другим по *всем критериям*. В результате такой процедуры остаются так называемые *эффективные* (или *«паретовские»*) решения, множество которых обычно существенно меньше исходного. А окончательный выбор «компромиссного» решения (не оптимального по всем критериям, которого, как правило, не существует, а *приемлемого* по этим критериям) остается за человеком — лицом, принимающим решение.

Подробное обсуждение этих вопросов выходит за рамки нашего курса.

В создание современного математического аппарата и развитие многих направлений исследования операций большой вклад внесли российские ученые Л. В. Канторович, Н. П. Бусленко, Е. С. Вентцель, Н. Н. Воробьев, Н. Н. Моисеев, Д. Б. Юдин и многие другие. Особо следует отметить роль академика Л. В. Канторовича, который в 1939 г., занявшись планированием работы агрегатов фанерной фабрики, решил несколько задач: о наилучшей загрузке оборудования, раскрое материалов с наименьшими потерями, о распределении грузов по нескольким видам транспорта и др. Л. В. Канторович сформулировал новый класс условно-экстремальных задач и предложил универсальный метод их решения, положив начало новому направлению прикладной математики — линейному программированию.

Значительный вклад в формирование и развитие исследования операций внесли зарубежные ученые Р. Акоф, Р. Беллман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Саати, Р. Черчмен, А. Кофман и др.

Методы исследования операций, как и любые математические методы, всегда в той или иной мере упрощают, огрубляют задачу, отражая порой нелинейные процессы линейными моделями, стохастические системы — детерминированными, динамические процессы — статическими моделями и т.д. Жизнь богаче любой схемы. Поэтому не следует ни преувеличивать значение количественных методов исследования операций, ни преуменьшать его, ссылаясь на примеры неудачных решений. Уместно привести в связи в этим шутливо-парадоксальное определение исследования операций, сделанное одним из его создателей Т. Саати, как «искусства давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими методами».

Раздел I

Модели линейного программирования и его приложения

Глава 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Экономико-математическая модель

В настоящее время в литературе насчитывается несколько десятков определений понятия «модель», отличающихся друг от друга. Тем не менее это понятие знакомо каждому: например, игрушечный самолет, бумажный голубь — модели самолета. Менее привычно представление о том, что фотоснимок пейзажа, географическая карта — это модель местности. И наверное, новым для многих является то, что знакомая со школьных лет формула пути $s = vt$ — математическая модель. Под ***моделью*** будем понимать *условный образ какого-либо объекта, приближенно воссоздающий этот объект с помощью некоторого языка.* В экономико-математических моделях таким *объектом* является экономический процесс (например, использование ресурсов, распределение изделий между различными типами оборудования и т.п.), а *языком* — классические и специально разработанные математические методы.

Экономико-математическая модель — *математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта.* Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактом виде с помощью математических соотношений. Использование математического моделирования в экономике позволяет углубить количественный экономический анализ, расширить область экономической информации, интенсифицировать экономические расчеты.

Можно выделить три основных этапа проведения экономико-математического моделирования. На *первом* этапе ставятся цели и задачи исследования, проводится качественное описание объекта в виде экономической модели. На *втором* этапе формируется математическая модель изучаемого объекта, осуществляется выбор (или разработка) методов исследования, проводится программирование модели на ЭВМ, подготавливается исходная информация. Далее проверяются пригодность машинной модели на основании правильности получаемых с ее помощью результатов и оценка их устойчивости. На *третьем*, основном, этапе экономико-математического моделирования осуществляются анализ математической модели, реализованной в виде программ для ЭВМ, проведение машинных расчетов, обработка и анализ полученных результатов.

Процедура экономико-математического моделирования заменяет дорогостоящие и трудоемкие натуральные эксперименты расчетами. Действительно, при использовании экономико-математических методов достаточно быстро и дешево проводится на ЭВМ сравнение многочисленных вариантов планов и управленческих решений. В результате отбираются наиболее оптимальные варианты.

Ниже рассматриваются примеры экономико-математических моделей.

1.2. Примеры задач линейного программирования

1. Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства)

▷ **1.1.** Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в табл. 1.1 (цифры условные).

Таблица 1.1

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	—	1
S_4	21	3	—

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2, соответственно 2 и 3 руб.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_1, x_2 — число единиц продукции соответственно P_1 и P_2, запланированных к производству. Для их изготовления (см. табл. 1.1) потребуется $(1 \cdot x_1 + 3x_2)$ единиц ресурса S_1, $(2x_1 + 1 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_2, $(1 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_3, и $(3x_1)$ единиц ресурса S_4. Так как потребление ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4 не должно превышать их запасов — соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21. \end{cases} \tag{1.1}$$

По смыслу задачи переменные

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \tag{1.2}$$

Суммарная прибыль F составит $2x_1$ руб. от реализации продукции P_1 и $3x_2$ руб. — от реализации продукции P_2, т.е.

$$F = 2x_1 + 3x_2. \tag{1.3}$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: *найти такой план выпуска продукции* $X = (x_1, x_2)$, *удовлетворяющий системе* (1.1) *и условию* (1.2), *при котором функция* (1.3) *принимает максимальное значение.* ▶

Задачу легко обобщить на случай выпуска n видов продукции с использованием m видов ресурсов.

Обозначим x_j $(j = 1, 2, ..., n)$ — число единиц продукции P_j, запланированной к производству; b_i $(i = 1, 2, ..., m)$ — запас ресурса S_i; a_{ij} — число единиц ресурса S_i, затраченного на изготовление единицы продукции P_j (числа a_{ij} часто называют *технологическими коэффициентами*); c_j — прибыль от реализации единицы продукции P_j.

Тогда экономико-математическая модель задачи об использовании ресурсов в общей постановке примет вид: *найти такой план* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *выпуска продукции, удовлетворяющий системе*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (1.4)$$

и условию

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0, \qquad (1.5)$$

при котором функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (1.6)$$

принимает максимальное значение.

2. Задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях)

▷ **1.2.** Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в табл. 1.2 (цифры условные).

Таблица 1.2

Питательное вещество (витамин)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимость 1 кг кормов I и II соответственно равна 4 и 6 руб.

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_1, x_2 — количество кормов I и II, входящих в дневной рацион. Тогда этот рацион (см. табл. 1.2) будет включать $(3x_1 + 1 \cdot x_2)$ единиц питательного вещества S_1, $(1 \cdot x_1 + 2x_2)$ единиц вещества S_2 и $(1 \cdot x_1 + 6x_2)$ единиц питательного вещества S_3. Так как содержание питательных веществ S_1, S_2 и S_3 в рационе должно быть не менее соответственно 9, 8 и 12 единиц, то получим систему неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 \geq 9, \\ \ \ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ \ \ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases} \tag{1.7}$$

Кроме того, переменные

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \tag{1.8}$$

Общая стоимость рациона составит (в руб.)

$$F = 4x_1 + 6x_2. \tag{1.9}$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: *составить дневной рацион* $X = (x_1, x_2)$, *удовлетворяющий системе* (1.7) и *условию* (1.8), *при котором функция* (1.9) *принимает минимальное значение*. ▶

Для формулировки задачи в общей постановке обозначим: x_j $(j = 1, 2, ..., n)$ — число единиц корма j-го вида; b_i $(i = 1, 2, ..., m)$ — необходимый минимум содержания в рационе питательного вещества S_i; a_{ij} — число единиц питательного вещества S_i в единице корма j-го вида; c_j — стоимость единицы корма j-го вида. Тогда экономико-математическая модель задачи примет вид: *найти такой рацион* $X = (x_1,\ x_2, ..., x_n)$, *удовлетворяющий системе*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \tag{1.10}$$

и условию

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, ...,\ x_n \geq 0, \tag{1.11}$$

при котором функция

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1.12}$$

принимает минимальное значение.

3. Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования)

Предприятию задан план производства продукции по времени и номенклатуре: требуется за время T выпустить $n_1, n_2, \ldots, n_k$ единиц продукции $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Продукция производится на станках $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Для каждого станка известны производительность a_{ij} (т.е. число единиц продукции P_j, которое можно произвести на станке S_i) в единицу времени и затраты b_{ij} на изготовление продукции P_j на станке S_i в единицу времени.

Необходимо составить такой план работы станков (т.е. так распределить выпуск продукции между станками), чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_{ij} — время, в течение которого станок S_i будет занят изготовлением продукции P_j ($i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, k$).

Так как время работы каждого станка ограничено и не превышает T, то справедливы неравенства:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1k} \le T, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2k} \le T, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mk} \le T. \end{cases} \tag{1.13}$$

Для выполнения плана выпуска по номенклатуре необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \ldots + a_{m1}x_{m1} \ge n_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{m2}x_{m2} \ge n_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + \ldots + a_{mk}x_{mk} \ge n_k. \end{cases} \tag{1.14}$$

Кроме того,

$$x_{ij} \geqslant 0 \; (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.15}$$

Затраты на производство всей продукции выразятся функцией

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + ... + b_{mk}x_{mk}. \qquad (1.16)$$

Экономико-математическая модель задачи об использовании мощностей примет вид: *найти такое решение* $X = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mk})$, *удовлетворяющее системам* (1.13) и (1.14) и *условию* (1.15), *при котором функция* (1.16) *принимает минимальное значение.*

4. Задача о раскрое материалов

На раскрой (распил, обработку) поступает материал одного образца в количестве a единиц. Требуется изготовить из него l различных комплектующих изделий в количествах, пропорциональных числам $b_1, b_2, ..., b_l$ (условие комплектности). Каждая единица материала может быть раскроена n различными способами, причем использование i-го способа ($i = 1, 2, ..., n$) дает a_{ik} единиц k-го изделия ($k = 1, 2, ..., l$).

Необходимо найти план раскроя, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_i — число единиц материала, раскраиваемых i-м способом, и x — число изготавливаемых комплектов изделий.

Так как общее количество материала равно сумме его единиц, раскраиваемых различными способами, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a. \qquad (1.17)$$

Требование комплектности выразится уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} = b_k x \quad (k = 1, 2, ..., l). \qquad (1.18)$$

Очевидно, что

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (1.19)$$

Экономико-математическая модель задачи: *найти такое решение* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *удовлетворяющее системе уравнений* (1.17) и (1.18) и *условию* (1.19), *при котором функция* $F = x$ *принимает максимальное значение.*

▷ **1.3.** Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2 : 1 : 3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить экономико-математическую модель задачи.

Решение. Прежде всего определим всевозможные способы распила бревен, указав соответствующее число получаемых при этом брусьев (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Способ распила i	Число получаемых брусьев длиной, м		
	1,2	3,0	5,0
1	5	—	—
2	2	1	—
3	—	2	—
4	—	—	1

Обозначим: x_i — число бревен, распиленных i-м способом ($i = 1, 2, 3, 4$); x — число комплектов брусьев.

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид

$$F = x \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195, \\ 5x_1 + 2x_2 = 2x, \\ x_2 + 2x_3 = x, \\ x_4 = 3x, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1, 2, 3, 4). \ ▶$$

Задачу о раскрое легко обобщить на случай m раскраиваемых материалов.

Пусть каждая единица j-ого материала ($j = 1, 2, ..., m$) может быть раскроена n различными способами, причем использование i-го способа ($i = 1, 2, ..., n$) дает a_{ijk} единиц k-го изделия ($k = 1, 2, ..., l$), а запас j-го материала равен a_j единиц.

Обозначим x_{ij} — число единиц j-го материала, раскраиваемого i-м способом.

Экономико-математическая модель задачи о раскрое в общей постановке примет вид: *найти такое решение* $X = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn})$, *удовлетворяющее системе*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le a_j \ (j=1,\ 2,\ ...,\ m), \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}a_{ijk} = b_k x \ (k=1,\ 2,\ ...,\ l) \end{cases}$$

и условию $x_{ij} \ge 0$, *при котором функция* $F = x$ *принимает максимальное значение.*

5. Транспортная задача рассмотрена в гл. 7.

1.3. Общая задача линейного программирования

Рассмотренные выше примеры задач линейного программирования позволяют сформулировать ***общую задачу линейного программирования***.

Дана система m линейных уравнений и неравенств с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + ... + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.20}$$

и линейная функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n. \tag{1.21}$$

Необходимо найти такое решение системы $X = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$, *где*

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, ..., l;\ l \le n), \tag{1.22}$$

при котором линейная функция F (1.21) *принимает оптимальное (т.е. максимальное или минимальное) значение.*

Система (1.20) называется *системой ограничений*, а функция F — *линейной функцией, линейной формой, целевой функцией* или *функцией цели*.

Более кратко общую задачу линейного программирования можно представить в виде

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1,\ 2,\ ...,\ k), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = k+1,\ k+2,\ ...,\ m), \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \ (j = 1,\ 2,\ ...,\ l;\ l \le n).$$

Оптимальным решением (или ***оптимальным планом***) задачи линейного программирования называется решение $X = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ системы ограничений (1.20), удовлетворяющее условию (1.22), при котором линейная функция (1.21) принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Термины «решение» и «план» — синонимы, однако первый используется чаще, когда речь идет о формальной стороне задачи (ее математическом решении), а второй — о содержательной стороне (экономической интерпретации).

При условии, что все переменные неотрицательны ($x_j \ge 0$, $j = 1, 2, ..., n$), система ограничений (1.20) состоит лишь из одних неравенств — такая задача линейного программирования называется *стандартной*; если система ограничений состоит из одних уравнений, то задача называется *канонической*[1]. Так, в приведенных выше примерах задач линейного программирования задачи 1 и 2 — стандартные, задача 4 — каноническая, а задача 3 — общая.

Любая задача линейного программирования может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче. Рассмотрим вначале вспомогательную теорему.

[1] В ряде работ по математическому программированию стандартную задачу называют *симметричной*, а каноническую — *основной*.

Теорема 1.1. *Всякому решению* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *неравенства*

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + ... + \alpha_{in}x_n \le b_i \tag{1.23}$$

соответствует определенное решение $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; \alpha_{n+i})$ *уравнения*

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + ... + \alpha_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \tag{1.24}$$

в котором

$$x_{n+i} \ge 0 \tag{1.25}$$

и, наоборот, каждому решению $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; \alpha_{n+i})$ *уравнения* (1.24) и *неравенства* (1.25) *соответствует определенное решение* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *неравенства* (1.23).

Используя эту теорему (которую принимаем без доказательства), представим в качестве примера стандартную задачу (1.4)—(1.6) в каноническом виде. С этой целью в каждое из m неравенств системы ограничений (1.4) введем дополнительные неотрицательные переменные x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}, и система ограничений (1.4) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{1.26}$$

Таким образом, стандартная задача (1.4)—(1.6) в канонической форме: *найти такое решение* $X = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m})$, *удовлетворяющее системе* (1.26) *и условиям* (1.5) *и* (1.25), *при которых функция* (1.6) *принимает максимальное значение.*

Замечание. В рассматриваемой задаче все неравенства вида «≤», поэтому дополнительные неотрицательные переменные вводились со знаком «+». В случае неравенства вида «≥», как, например, в задаче (1.10)—(1.12), соответствующие дополнительные переменные следовало бы ввести со знаком «–».

УПРАЖНЕНИЯ

В задачах **1.4—1.7** составить экономико-математические модели.

1.4. Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	A	*B*	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.	30	40	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что изделий B надо выпустить не менее, чем изделий A.

1.5. Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден. ед. и содержит 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов, 3 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10 ден. ед. и содержит 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не более 16 ед.

1.6. На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт. в сутки		Затраты на работу линий, ден. ед. в сутки		План, шт.
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

1.7. Необходимо распилить 20 бревен длиной по 5 м каждое на бруски по 2 и 3 м, при этом должно получиться равное количество брусков каждого размера.

Составить такой план распила, при котором будет получено максимальное число комплектов и все бревна будут распилены (в один комплект входит по одному бруску каждого размера).

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

2.1. Система *m* линейных уравнений с *n* переменными

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

или в краткой записи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

В задачах линейного программирования представляют интерес системы, в которых ранг r матрицы системы $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, или, что то же самое, максимальное число независимых уравнений системы r меньше числа переменных, т.е. $r < n$. Будем полагать, что в системе (2.1) все m уравнений системы независимы, т.е. $r = m$ и соответственно $m < n$.

*Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) называются **основными** (или **базисными**), если определитель матрицы коэффициентов при них, или базисный минор, отличен от нуля.*

Тогда остальные $n-m$ переменных называются ***неосновными*** (или ***свободными***).

Основными могут быть разные группы из n переменных по m. Максимально возможное число групп основных переменных равно числу способов выбора m переменных из их общего числа n, т.е. числу сочетаний C_n^m. Но так как могут встретиться случаи, когда определитель матрицы коэффициентов при m переменных равен нулю, то общее число групп основных переменных не превосходит C_n^m.

▷ **2.1.** Найти все возможные группы основных переменных в системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Общее число групп основных переменных не более, чем $C_4^2 = 4 \cdot 3/2 = 6$, т.е. возможные группы основных переменных: x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_4; x_3, x_4.

Выясним, могут ли быть основными переменные x_1, x_2. Так как определитель матрицы из коэффициентов при этих переменных $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0,$ то x_1, x_2 могут быть основными переменными. Рассуждая аналогично, найдем, что могут быть основными переменные x_1, x_3; x_1, x_4, но не могут быть основными x_2, x_3; x_2, x_4; x_3, x_4, так как в трех последних группах переменных соответствующие определители равны нулю (например, для переменных x_3, x_4 определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$). ▶

Для решения системы (2.1) при условии $m < n$ докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Если для системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) ранг матрицы коэффициентов при переменных равен m, т.е. существует хотя бы одна группа основных переменных, то эта система является неопределенной, причем каждому произвольному набору значений неосновных переменных соответствует одно решение системы.*

❒ Пусть, например, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — основные переменные (если это не так, то нумерацию соответствующих переменных можно изменить), т.е. определитель матрицы

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Оставим в левых частях уравнений системы (2.1) члены с переменными $x_1, x_2, \dots, x_m$, а члены с переменными x_{m+1}, $x_{m+2}, \dots, x_n$ перенесем в правые части. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1m}x_m=b_1-a_{1,m+1}x_{m+1}-\dots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2m}x_m=b_2-a_{2,m+1}x_{m+1}-\dots-a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mm}x_m=b_m-a_{m,m+1}x_{m+1}-\dots-a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Задавая неосновным переменным $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ произвольные значения, каждый раз будем получать новую систему с новыми свободными членами $b_1', b_2', \dots, b_m'$. Каждая из полученных систем будет иметь один и тот же определитель $|A|\neq 0$, следовательно, в силу теоремы Крамера каждая из этих систем будет иметь единственное решение. Так как получаемых таким образом систем бесконечно много, то и система (2.1) будет иметь бесконечное множество решений. ■

▷ **2.2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1\ \ -x_2-2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=2. \end{cases}$$

Решение. В задаче **2.1** установлено, что основными могут быть переменные x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4. Возьмем в качестве основных переменные x_1, x_2, а переменные x_3, x_4 будем считать неосновными и перенесем их с соответствующими коэффициентами в правые части уравнений системы. Получим

$$\begin{cases} x_1-x_2=2x_3-x_4, \\ 2x_1+x_2=2-2x_3+x_4. \end{cases}$$

Решая данную систему любым способом, найдем $x_1 = 2/3$; $x_2 = 2/3 - 2x_3 + x_4$. Задавая неосновным переменным x_3 и x_4 произвольные значения, например $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, получим бесконечное множество решений этой системы ($x_1 = 2/3$; $x_2 = 2/3 - 2c_1 + c_2$; $x_3 = c_1$; $x_4 = c_2$). ▶

Решение $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системы (2.1) называется *допустимым*[1], если оно содержит лишь неотрицательные компоненты, т.е. $x_j \geq 0$ для любых $j = 1, 2, ..., n$. В противном случае решение называется *недопустимым*. Так, в задаче **2.2** решение системы при $c_1 = 2$, $c_2 = 5$, т.е. $X_1 = (2/3;\ 5/3;\ 2;\ 5)$, является допустимым, а при $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, т.е. $X_2 = (2/3;\ -7/3;\ 2;\ 1)$, — недопустимым.

Среди бесконечного множества решений системы выделяют так называемые базисные решения.

***Базисным** решением системы m линейных уравнений с n переменными называется решение, в котором все $n - m$ неосновных переменных равны нулю.*

В задачах линейного программирования особый интерес представляют *допустимые базисные решения* или, как их еще называют, *опорные планы*. Число базисных решений является конечным, так как оно равно числу групп основных переменных, не превосходящему C_n^m. Базисное решение, в котором хотя бы одна из основных переменных равна нулю, называется *вырожденным*.

▷ **2.3.** Найти все базисные решения системы, приведенной в задаче **2.1**.

Решение. В задаче **2.1** было установлено, что существует три группы основных переменных: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4, т.е. число базисных решений равно 3.

Найдем первое базисное решение, взяв в качестве основных переменные x_1, x_2 и неосновных переменные x_3, x_4. Приравняв неосновные переменные нулю, т.е. при $x_3 = x_4 = 0$, получим систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 2, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 2/3$; $x_2 = 2/3$. Следовательно, первое базисное решение системы $X_1 = (2/3;\ 2/3;\ 0;\ 0)$ — допустимое.

Если взять за основные переменные x_1, x_3 и приравнять нулю соответствующие неосновные переменные $x_2 = x_4 = 0$,

[1] Именно такие решения представляют интерес в большинстве задач линейного программирования.

получим второе базисное решение $X_2 = (2/3;\ 0;\ 1/3;\ 0)$ — также допустимое. Аналогично можно найти и третье базисное решение $X_3 = (2/3;\ 0;\ 0;\ -2/3)$ — недопустимое. ▶

Совместная система (2.1) имеет бесконечно много решений, из них базисных решений — конечное число, не превосходящее C_n^m.

2.2. Выпуклые множества точек

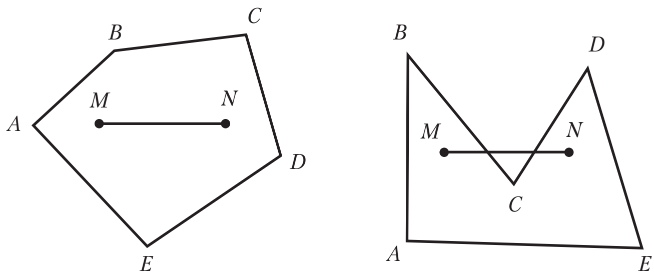
В школьном курсе математики *выпуклыми* назывались многоугольники, целиком расположенные по одну сторону от прямых, на которых лежат их стороны.

Например, многоугольник на рис. 2.1, *а* выпуклый, а многоугольник на рис. 2.1, *б* не является выпуклым (он расположен по обе стороны от прямой BC).

Общим определяющим свойством, которое отличает выпуклый многоугольник от невыпуклого, является то, что если взять любые две его точки и соединить их отрезком, то весь отрезок будет принадлежать этому многоугольнику. Это свойство может быть принято за определение выпуклого множества точек.

Множество точек называется ***выпуклым****, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.*

Согласно этому определению многоугольник на рис. 2.1, *а* является выпуклым множеством, а многоугольник на рис. 2.1, *б* таковым не является, так как отрезок MN



а *б*

Рис. 2.1

между двумя его точками M и N не полностью принадлежит этому многоугольнику.

Выпуклыми множествами могут быть не только многоугольники. Примерами выпуклых множеств являются круг, сектор, отрезок, многоугольная область, куб, пирамида (рис. 2.2, *а* — *е*), многогранная область, прямая, полуплоскость, полупространство и т.п.

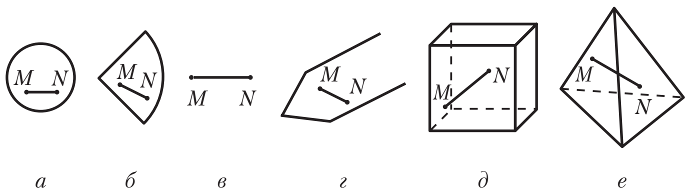


Рис. 2.2

Выпуклые множества обладают важным свойством, которое устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2.2. *Пересечение (общая часть) любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

❐ Пусть M и N — любые две точки пересечения двух[1] множеств A и B (рис. 2.3). Так как точки M и N принадлежат пересечению множеств, т.е. одновременно и выпуклому множеству A, и выпуклому множеству B, то согласно определению выпуклого множества все точки отрезка MN будут принадлежать как множеству A, так и множеству B, т.е. пересечению этих множеств. А это и означает, что пересечение данных множеств есть выпуклое множество. ■

Среди точек выпуклого множества можно выделить внутренние, граничные и угловые точки.

Точка множества называется *внутренней*, если в некоторой ее окрестности[2] содержатся точки только данного множества.

Точка множества называется *граничной*, если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему.

Особый интерес в задачах линейного программирования представляют угловые точки.

---

[1] Для доказательства теоремы ограничимся случаем двух множеств.

[2] Под *окрестностью* точки плоскости (пространства) подразумевается круг (шар) с центром в этой точке.

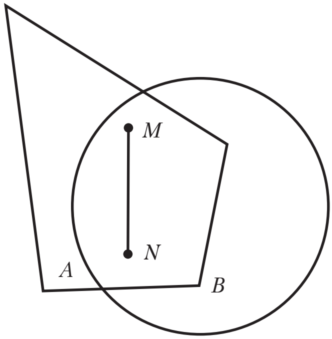


Рис. 2.3

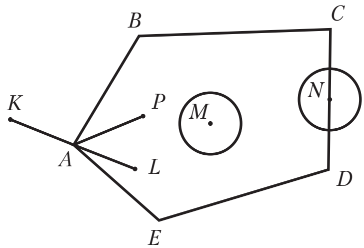


Рис. 2.4

Точка выпуклого множества называется ***угловой*** *(или* ***крайней****), если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.*

На рис 2.4 приведены примеры различных точек многоугольника: внутренней (точка M), граничной (точка N) и угловых (точки A, B, C, D, E). Точка A — угловая, так как для любого отрезка, целиком принадлежащего многоугольнику, например отрезка AP, она не является внутренней; точка A — внутренняя для отрезка KL, но этот отрезок не принадлежит целиком многоугольнику.

Для выпуклого множества угловые точки всегда совпадают с вершинами многоугольника (многогранника). Для невыпуклого множества введение понятия угловой точки теряет смысл. Так, на рис. 2.5 точка A является вершиной невыпуклого многоугольника и одновременно внутренней для отрезка KL, целиком принадлежащего этому многоугольнику.

Множество точек называется *замкнутым*, если включает все свои граничные точки. Множество точек называется *ограниченным*, если существует шар (круг) радиуса конечной

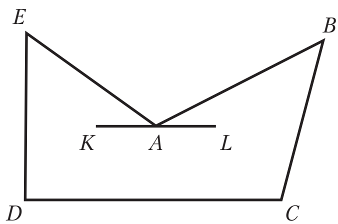


Рис. 2.5

длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество; в противном случае множество называется *неограниченным*.

Если плоская фигура ограничена только прямыми или их отрезками (см. рис 2.1, *а*, 2.2, *в*, *г*), то число ее угловых точек конечно; в случае криволинейности границ (или их участков) фигура (см. рис. 2.2, *а*, *б*) содержит бесконечно много угловых точек, что позволяет сделать следующее определение.

Выпуклое замкнутое множество точек пространства (плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется ***выпуклым многогранником (многоугольником)****, если оно ограниченное, и* ***выпуклой многогранной (многоугольной) областью****, если оно неограниченное.*

До сих пор рассматривались выпуклые множества точек на плоскости и в пространстве. Аналитически такие точки изображаются упорядоченной парой чисел (x_1, x_2) или упорядоченной тройкой чисел (x_1, x_2, x_3). Понятие точки можно обобщить, подразумевая под точкой (или вектором) упорядоченный набор n чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, в котором числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *координатами* точки (вектора). Такое обобщение имеет смысл, так как если взять какой-либо объект, то для его характеристики двух-трех чисел обычно бывает недостаточно и необходимо взять n чисел, где $n > 3$.

Множество всех точек $X = (x_1,x_2, ..., x_n)$ образует n-мерное точечное (векторное) пространство. При $n > 3$ точки и фигуры n-мерного пространства не имеют реального геометрического смысла и все исследования объектов этого пространства необходимо проводить в аналитической форме. Тем не менее оказывается целесообразным и в этом случае использовать геометрические понятия для облегчения представлений об объектах n-мерного пространства.

2.3. Геометрический смысл решений неравенств, уравнений и их систем

Рассмотрим **решения неравенств**.

Теорема 2.3. *Множество решений неравенства с двумя переменными*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \tag{2.2}$$

является одной из двух полуплоскостей, на которые вся плоскость делится прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, *включая и эту прямую, а другая полуплоскость с той же прямой есть множество решений неравенства*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1. \qquad (2.3)$$

❒ Для произвольной абсциссы x_1 ордината точки M (рис. 2.6), лежащей на прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, при условии $a_{12} \neq 0$, есть $x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$, т.е. координаты точки $M\left(x_1; -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}\right)$.

Через точку M проведем прямую, параллельную оси Ox_2. Тогда для любых точек P и Q этой прямой, расположенных выше и ниже точки M, т.е. в верхней и нижней полуплоскостях, будут верны неравенства $x_{2Q} \geq x_{2M}$ и $x_{2P} \leq x_{2M}$ или $x_2 \geq -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$ и $x_2 \leq -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$. При условии $a_{12} > 0$ неравенства преобразуются соответственно к виду $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ и $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$, т.е. координаты

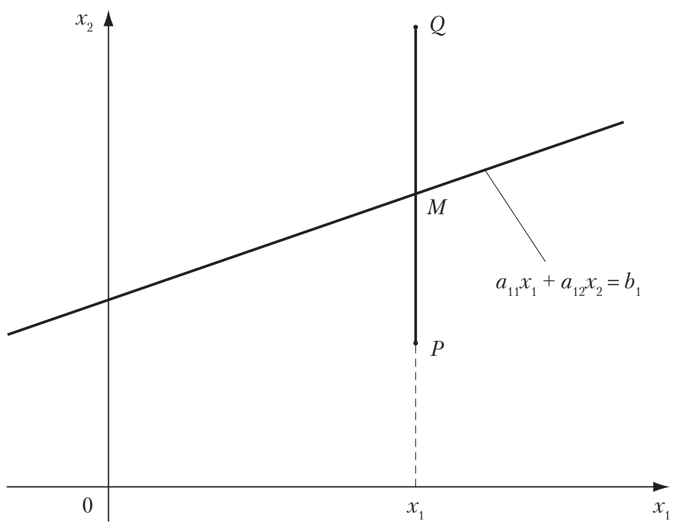


Рис. 2.6

всех точек верхней полуплоскости удовлетворяют неравенству (2.2), а нижней полуплоскости — неравенству (2.3). В случае $a_{12} < 0$, наоборот, координаты всех точек верхней полуплоскости удовлетворяют неравенству (2.3), а координаты нижней полуплоскости — неравенству (2.2). ■

▷ **2.4.** Построить множество решений неравенства:

а) $3x_1 - 4x_2 + 12 \le 0$; б) $3x_1 - 2x_2 \ge 0$.

Решение. В соответствии с теоремой 2.3 множество решений неравенства есть полуплоскость.

1) Построим границу полуплоскости — прямую $3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$, найдя точки ее пересечения с осями координат $A\ (-4;0)$ и $B\ (0;3)$ на рис 2.7, *а*.

Для определения искомой полуплоскости (верхней или нижней) рекомендуется задать произвольную контрольную точку, не лежащую на ее границе — построенной прямой. Если неравенство выполняется в контрольной точке, то оно выполняется и во всех точках полуплоскости, содержащей контрольную точку, и не выполняется во всех точках другой полуплоскости. И наоборот, в случае невыполнения неравенства в контрольной точке оно не выполняется во всех точках полуплоскости, содержащей контрольную точку, и выполняется во всех точках другой полуплоскости.

В качестве контрольной точки удобно взять начало координат $O\ (0;0)$, не лежащее на построенной прямой. Координаты точки O не удовлетворяют неравенству: $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12 \le 0$, следовательно, решением данного неравенства является верх-

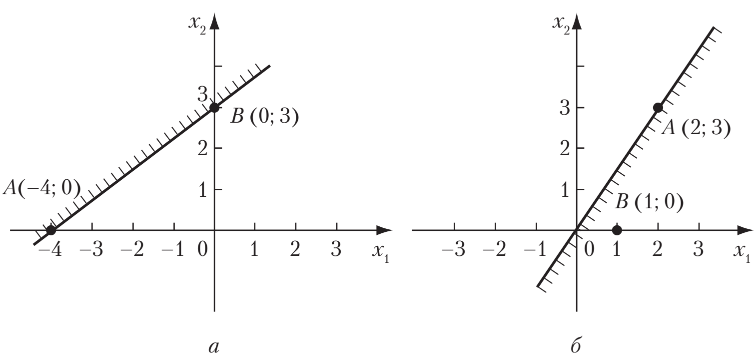


Рис. 2.7

няя полуплоскость, не содержащая контрольную точку O. Искомая полуплоскость выделена штриховкой.

2) Построим границу полуплоскости — прямую $3x_1 - 4x_2 = 0$ по двум точкам. Одной из этих точек является начало координат на рис. 2.7, *б* (в уравнении прямой отсутствует свободный член), а другую точку берем на прямой произвольно, например A (2; 3) на рис. 2.7, *б*. В качестве контрольной возьмем, например, точку B (1; 0). Самую «простую» точку O (0; 0) здесь в качестве контрольной брать не следует, поскольку она лежит на построенной прямой. Так как координаты контрольной точки B (1; 0) удовлетворяют неравенству, т.е. $3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \geq 0$, то решением данного неравенства является нижняя (правая) полуплоскость, содержащая эту точку. ▶

Учитывая, что множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (2.4)$$

при $n = 3$, является *плоскостью*, а при $n > 3$ ее обобщением в n-мерном пространстве — *гиперплоскостью*, теорему 2.3 можно распространить на случай трех и более переменных.

Теорема 2.4. *Множество всех решений линейного неравенства с n переменными*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

является одним из полупространств, на которые все пространство делится плоскостью или гиперплоскостью (2.4), *включая и эту плоскость (гиперплоскость).*

Рассмотрим **множество решений систем неравенств**.

Теорема 2.5. *Множество решений совместной системы m линейных неравенств с двумя переменными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases}$$

является выпуклым многоугольником (или выпуклой многоугольной областью).

❒ Каждое из неравенств в соответствии с теоремой 2.3 определяет одну из полуплоскостей, являющуюся выпуклым множеством точек. Множеством решений совместной системы линейных неравенств служат точки, которые принадлежат полуплоскостям решений всех неравенств, т.е. принадлежат их пересечению. Согласно теореме 2.2 о пересечении выпуклых множеств это множество является выпуклым и содержит конечное число угловых точек, т.е. является выпуклым многоугольником (выпуклой многоугольной областью). ■

▷ **2.5.** Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \le 20, & \text{(I)} \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24, & \text{(II)} \\ x_1 - 3x_2 \le 3, & \text{(III)} \\ x_1 \ge 0, & \text{(IV)} \\ 0 \le x_2 \le 6. & \text{(V,VI)} \end{cases}$$

Решение. Для построения искомого множества решений системы неравенств находим последовательно множество решений каждого неравенства аналогично тому, как это делалось в задаче **2.4**. Рекомендуем после определения каждой полуплоскости и выделения ее соответствующей штриховкой находить последовательно их пересечение: сначала полуплоскостей решений первых двух неравенств (многоугольной области *GFD* на рис. 2.8), затем первых трех неравенств (треугольника *GFD*), потом — четырех неравенств (четырехугольника *HAFD*), далее — пяти неравенств (пятиугольника *OAFDE*) и, наконец, всех шести неравенств — выпуклого многоугольника *OABCDE*.

Координаты угловых точек — вершин этого многоугольника — найдем как координаты точек пересечения соответствующих прямых. Например, точка D является точкой пересечения прямых II и III, т.е. ее координаты являются решением системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 24, & \text{(II)} \\ x_1 - 3x_2 = 3, & \text{(III)} \end{cases}$$

откуда $x_1 = 9,\ x_2 = 2$, т.е. $D\ (9;2)$. Аналогично находим координаты других угловых точек: $O\ (0;0)$, $A\ (0;5)$, $B\ (4/5;6)$, $C\ (3;6)$, $E\ (3;0)$. ▶

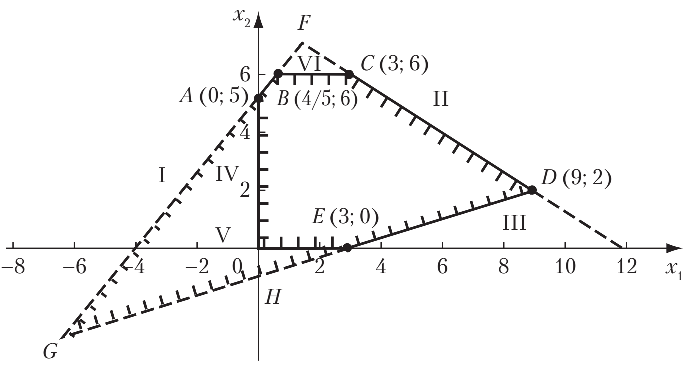


Рис. 2.8

При построении областей решений систем неравенств могут встретиться и другие случаи: множество решений — выпуклая многоугольная область (рис. 2.9, *а*); одна точка (рис. 2.9, *б*); пустое множество, когда система неравенств несовместна (рис. 2.9, *в*).

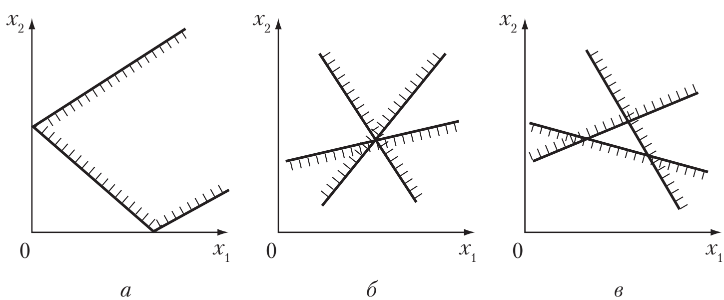


Рис. 2.9

Теорема 2.6. *Множество решений совместной системы m линейных неравенств с n переменными является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n-мерном пространстве.*

Рассмотрим **множество допустимых решений системы *m* линейных уравнений с *n* переменными**.

Теорема 2.7. *Множество всех допустимых решений совместной системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n-мерном пространстве.*