УДК 33.51(075.8)
ББК 22.18
Д33

Р е ц е н з е н т ы :
д. физ.-мат. н. проф. **А.В. Тищенко** (МИИ),
к. физ.-мат. н. доц. **В.Б. Гисин** (ФА)

Бабайцев В.А., Браилов А.В., Солодовников А.С.
Математика для экономистов: Руководство к решению задач. Теория вероятностей. М.: Финансовая академия, 2002. 116 с.

Данное руководство является переработанным и расширенным переизданием аналогичного пособия 1999 г. В него включена новая тема "Случайные величины". В каждый раздел добавлены вопросы по рассматриваемой теме, дается краткая теоретическая справка, разбираются решения типовых задач, приведены упражнения и вопросы для самостоятельной работы. Руководство предназначено для проведения практических занятий, организации самостоятельной работы студентов и подготовки к экзамену по данной дисциплине для всех специальностей.

ISBN 5-7942-0295-5

Глава 1

Случайные события

§ 1.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторными называются задачи на подсчет числа различных комбинаций.

В основе решения многих комбинаторных задач лежит так называемое *правило произведения*. Назовем *строкой длины* k любую последовательность

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – какие-либо объекты. Две строки одинаковой длины

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \text{ и } (y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

считаются различными, если хотя бы для одного номера i имеем $x_i \neq y_i$.

Правило произведения. *Пусть объект x_i может быть выбран m_1 способами; при фиксированном выборе x_1 объект x_2 может быть выбран m_2 способами; при фиксированном выборе x_1, x_2 объект x_3 может быть выбран m_3 способами и т.д. Тогда число различных строк*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

будет $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$.

В частности, если объект x_1 может быть выбран m_1 способами, а при каждом фиксированном выборе x_1 объект x_2 может быть выбран m_2 способами, то число различных строк (x_1, x_2) будет равно $m_1 \cdot m_2$.

Пусть X – множество, состоящее из n элементов (множество объема n). *Перестановкой* множества X называется расположение элементов этого множества в каком-то определенном порядке. Число различных перестановок множества, состоящего из n элементов, равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Пусть снова X – множество из n элементов. Любое подмножество Y множества X, состоящее из m элементов ($m \leq n$), называется *сочетанием m элементов из n*. Число различных сочетаний m элементов из n обозначается C_n^m. Справедлива важная формула

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (1.1)$$

или

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(m-1)\big)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}. \qquad (1.2)$$

Например,

$$C_n^1 = \frac{n}{1} = n, \; C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \; C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ и т.д.}$$

По определению, $C_n^0 = 1$.

Свойства чисел C_n^m:

1°. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

2°. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Для любого натурального n справедлива формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n b^0 \qquad (1.3)$$

(*формула бинома Ньютона*). Из школьного курса известны частные случаи этой формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Примеры

1. У одного книголюба 7 книг, у другого – 6. Все книги различные. Сколькими способами можно осуществлять обмен книги на книгу?

Р е ш е н и е . Любой обмен можно представить как строку (x_1, x_2), где x_1 – любая из книг первого, а x_2 – любая из книг второго книголюба. Книга x_1 может быть выбрана 7 способами, а при любом выборе x_1 книга x_2 – 6 способами. По правилу произведения число различных обменов будет $7 \cdot 6 = 42$.

2. В группе 30 студентов. Ежедневно для дежурства выделяются двое человек. Можно ли составить расписание дежурств на год вперед так, чтобы никакая пара студентов не дежурила дважды?

Р е ш е н и е . Дежурная группа представляет собой подмножество из 2 элементов в множестве, состоящем из 30 элементов. Поэтому число всех возможных дежурных групп равно

$$C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} = 435.$$

Это превосходит число дней в году (365). Следовательно, требуемое расписание дежурств составить можно.

3. Сколькими способами группа из 10 человек может выстроиться в очередь за получением стипендии?

Р е ш е н и е . Любое выстраивание в очередь есть перестановка множества из 10 элементов. Поэтому число всех возможных очередей будет

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800.$$

4. Найти коэффициент при x^4 в разложении бинома $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

Р е ш е н и е . Любой член указанного бинома имеет вид:

$$C_{10}^k x^k \left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} = C_{10}^k x^{2k-10}.$$

Полагая $2k - 10 = 4$, получим $k = 7$. Поэтому член бинома содержащий x^4, будет $C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.

5. Сколько различных слов максимальной длины можно составить из двух букв "а" и 10 букв "в"?

Р е ш е н и е . Для пояснения приведем два примера требуемых слов:

вввввваввавв, (1.4)

вввавввввввв. (1.5)

Рассмотрим любое из требуемых слов и отметим номера тех мест, где стоит буква "а". Например, для слов вида (1.4) это будут номера 7, 10, а для слова вида (1.5) номера 4, 7. Совокупность таких номеров представляет собой подмножество из 2 элементов в множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, состоящем из 12 номеров. И обратно, каково бы ни было подмножество из 2 элементов в множестве X, ему отвечает в указанном смысле слово из 2 букв "а" и 10 букв "в". (Например, для подмножества {1, 7} таким словом будет авввввавввввв). Таким образом, различных слов требуемого вида будет столько же, сколько различных подмножеств из 2 элементов имеется в множестве X, т.е. $C_{12}^2 = 66$.

6. На фондовой бирже продаются акции трех предприятий I, II, III. Сколькими способами можно приобрести 10 акций?

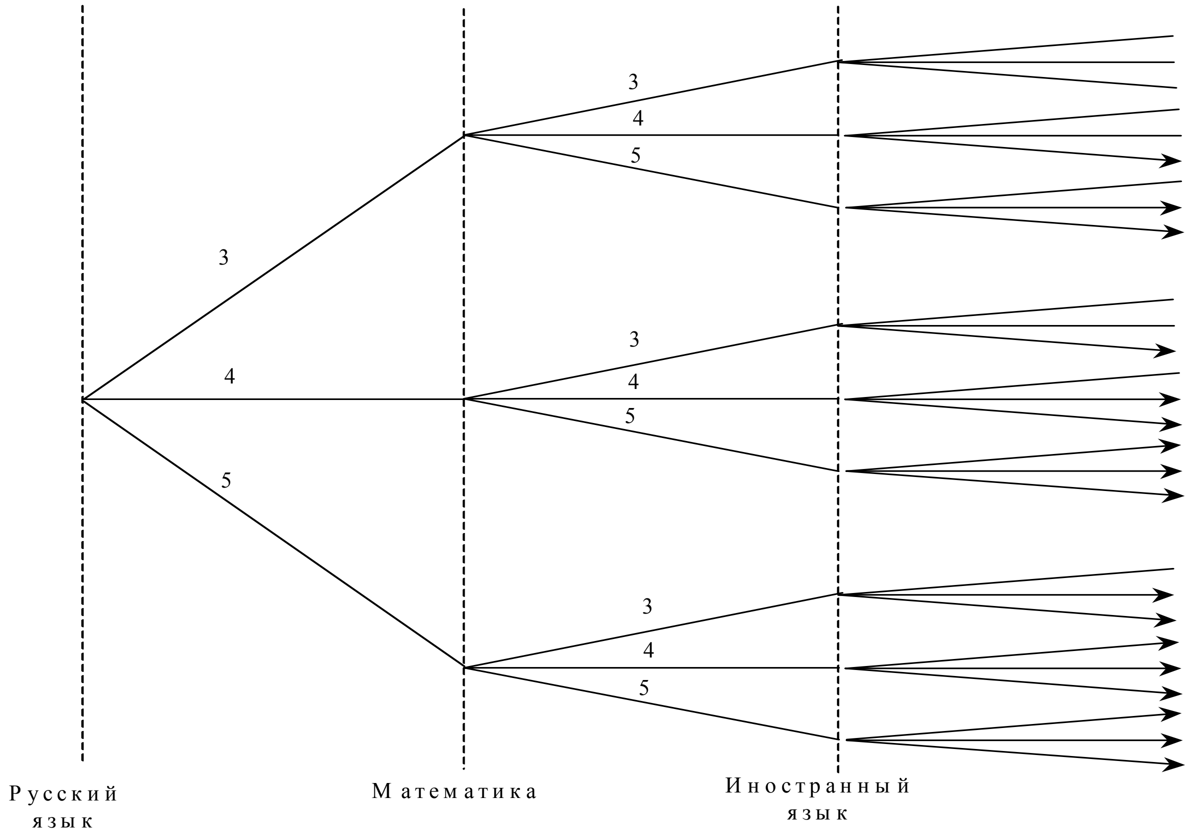
Р е ш е н и е . Сопоставим каждому набору из 10 акций указанных предприятий слово из десяти единиц и двух нулей следующим способом. Вначале пишем единицы в количестве, равном числу купленных акций предприятия I, затем пишем нуль, чтобы отделить акции первого предприятия от акций второго, затем пишем единицы в количестве, равном числу купленных акций предприятия II, пишем нуль и дописываем единицы для акций третьего предприятия. Например, если было куплено 5 акций предприятия I, 3 акции предприятия II и 2 акции предприятия III, то получим слово 111110111011.

Таким образом, каждому набору из 10 акций сопоставлено слово из 10 нулей и 2 единиц. Число таких слов, согласно примеру 5, равно $C_{10+2}^{2} = \dfrac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$.

7. Для поступления в вуз нужно сдать 3 вступительных экзамена: русский язык, иностранный язык и математику. Экзамены сдаются по пятибалльной системе, причем получение оценки "2" делает поступление невозможным. Сколькими способами абитуриент может получит на экзаменах не менее 12 баллов (сдача экзамена с оценкой "2" исключается).

Решение. Для получения не менее 12 баллов нужно "потерять" не более 3 баллов. Пусть последовательность экзаменов такова: русский язык, математика, иностранный язык. Рассмотрим так называемое "дерево вариантов" (см. рис.).

Суммируя оценки по всем дисциплинам, мы видим, что имеется ровно 17 возможностей набрать не менее 12 баллов (соответствующие отрезки снабжены стрелками).



Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 В чем состоит комбинаторное правило произведения? Дайте обоснование для последовательностей $<x_1, x_2>$ и $<x_1, x_2, x_3>$.

3 Сколько различных подмножеств имеет множество, состоящее из n элементов? Дайте обоснование.

3 Что такое "перестановка из n элементов"? Чему равно число различных перестановок?

3 Что такое "сочетание k элементов из n" ($k \le n$)? Какое число обозначается C_n^k? Укажите формулу для C_n^k и дайте обоснование.

3 Выведите формулу бинома Ньютона.

3 Чему равна сумма $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$? Почему?

Упражнения

1. Сколько различных словарей необходимо для непосредственного перевода с любого из данных 5 языков на любой другой (из тех же 5 языков)?

2. В учреждении 20 отделов. Любые два отдела соединены телефонной линией. Сколько всего телефонных линий?

3. У одного книголюба 6 книг, у другого – 7 (все книги различны). Сколькими способами можно осуществить обмен двух книг на две книги?

4. В автомашине 7 мест. Сколькими способами семь человек могут сесть в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

5. Сколько имеется пятизначных чисел, в которых две одинаковые цифры не стоят рядом?

6. В пассажирском поезде девять вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде четырех человек при условии, что все они поедут в разных вагонах?

7. Сколькими способами шесть различных учебников можно распределить поровну между двумя студентами?

8. Сколькими способами 12 различных книг можно распределить поровну между тремя людьми?

9. Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, если две определенные книги должны стоять рядом?

10. Студенту необходимо сдать 4 экзамена в течение 10 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание экзаменов?

11. Сколько чисел, заключенных между 1000 и 9999, содержат цифру 3?

12. Предприятие может представить работу по данной специальности четырем женщинам, по другой специальности – пяти мужчинам, и по третьей специальности – трем работникам любого пола. Сколькими способами можно заполнить эти места, если имеется 18 претендентов на них, среди которых 8 женщин и 10 мужчин?

13. В группе 12 девушек и 10 юношей. Сколькими способами можно выстроить их в очередь, если в ней как все девушки, взятые отдельно, так и все юноши, взятые отдельно, должны стоять по росту?

14. На фондовой бирже продаются акции 5 предприятий. Сколькими способами можно приобрести 20 акций?

15. По формуле бинома Ньютона напишите разложение для $(1 - x^3)^5$.

16. В разложении бинома $(a^2 + ax)^6$ найдите сумму членов, содержащих a^{10}.

17. Используйте биномиальную формулу для приближенного вычисления $1{,}002^{10}$; $0{,}997^{10}$.

18. Используя формулу бинома Ньютона, докажите равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n .$$

Дайте истолкование этому равенству, исходя из смысла чисел C_n^k.

§ 1.2. Комбинации событий. Классический способ подсчета вероятностей

Суммой событий A и B называется событие $A + B$, заключающееся в наступлении *хотя бы одного* из событий A и B. Вообще, суммой <u>конечного</u>, или <u>счетного</u>, множества событий называется событие, заключающееся в наступлении хотя бы одного из событий данного множества.

Произведением событий A и B называется событие AB, заключающееся в *одновременном* (совместном) наступлении обоих событий A и B. Вообще, произведением <u>конечного</u>, или <u>счетного</u>, множества событий называется событие, заключающееся в одновременном наступлении всех событий данного множества.

Противоположным событием для A называется событие $\overline{A}$, заключающееся в том, что *A не наступает*. Иначе говоря, $\overline{A}$ – это не наступление A.

Если наступление события отмечать символом 1, а не наступление – символом 0, то полное описание событий $A + B$, AB и $\overline{A}$ можно дать с помощью следующих таблиц:

A	B	$A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1

A	B	AB
1	1	1
1	0	0
0	1	0

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

0	0	0

0	0	0

Справедливы формулы:

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}\ ,\ \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}\ ,$$

вообще,

$$\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}\ ,$$

$$\overline{A_1A_2\ldots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\ldots+\overline{A_n}\ .$$

При этом равенство двух событий понимается в том смысле, что всякий раз, когда наступает одно из них, наступает и другое.

Классический способ подсчета вероятностей применяется в тех случаях, когда опыт можно представить как случайный выбор *элементарного исхода* ω_i из конечного множества равновероятных исходов $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$. Исход ω_i называется *благоприятным* для события A, если A наступает всякий раз, когда опыт завершается ω_i. Пусть k – количество всех благоприятных для A элементарных исходов, $P(A)$ – вероятность события A. Классический способ подсчета вероятностей состоит в применении формулы $P(A)=k/n$.

Примеры

1. С помощью таблиц, определяющих $A+B$, AB и $\overline{A}$, доказать равенство $A+\overline{B}=A+\overline{A}\,\overline{B}$.

Решение. Составим таблицы, дающие все случаи наступления левой и правой частей доказываемого равенства:

A	B	$\overline{B}$	$A+\overline{B}$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$A+\overline{A}\,\overline{B}$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Последние столбцы этих таблиц одинаковы, что и означает справедливость равенства $A+\overline{B}=A+\overline{A}\,\overline{B}$.

2. Опыт состоит в бросании трех монет. Пусть монеты пронумерованы и события Γ_1, Γ_2, Γ_3 означают выпадение герба соответственно на первой, второй и третьей монетах. Выразите через Γ_1, Γ_2, Γ_3 следующие события:

A – выпадение одного герба и двух цифр,

B – выпадение не более одного герба,

C – число выпавших гербов меньше числа выпавших цифр.

Решение. Событие A может произойти только в следующих трех случаях: $\Gamma_1\overline{\Gamma}_2\overline{\Gamma}_3$, $\overline{\Gamma}_1\Gamma_2\overline{\Gamma}_3$, $\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2\Gamma_3$. Следовательно,

$$A=\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2\Gamma_3+\overline{\Gamma}_1\Gamma_2\overline{\Gamma}_3+\Gamma_1\overline{\Gamma}_2\overline{\Gamma}_3\ .$$

Аналогично имеем $B=\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2\overline{\Gamma}_3+A$ или

$$B=\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2\overline{\Gamma}_3+\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2\Gamma_3+\overline{\Gamma}_1\Gamma_2\overline{\Gamma}_3+\Gamma_1\overline{\Gamma}_2\overline{\Gamma}_3\ .$$

Что касается события C, то оно равнозначно B, т.е. выражается той же записью.

3. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что герб выпадет не менее чем на двух монетах?

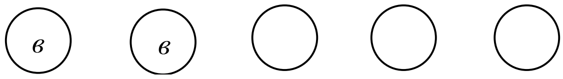
Решение. При бросании трех монет возможно 8 вариантов:

$$\Gamma\Gamma\Gamma,\ \Gamma\Gamma\overline{\Gamma},\ \Gamma\overline{\Gamma}\Gamma,\ \overline{\Gamma}\Gamma\Gamma,\ \overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma}\Gamma,\ \overline{\Gamma}\Gamma\overline{\Gamma},\ \Gamma\overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma},\ \overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma},$$

составляющих множество элементарных исходов Ω. Событию A благоприятны 4 последних. Отсюда $P(A)=4/8=0{,}5$.

4. (Задача о выборке). В лотерее разыгрывается 100 билетов; из них 10 являются выигрышными, а остальные 90 "пустые". Некто покупает 5 билетов. Какова вероятность, что среди них будет 2 выигрышных и 3 "пустых" (событие A)?

Р е ш е н и е . В данном случае испытание состоит в случайном выборе 5 билетов из 100; элементарный исход испытания – это любые 5 билетов из 100. Число элементарных исходов равно C_{100}^5. Благоприятными для события A являются пятерки вида



(два выигрышных и три "пустых"). Выбор пары выигрышных билетов из 10 выигрышных может быть осуществлен, очевидно, C_{10}^2 способами, а выбор тройки "пустых" билетов из 90 – C_{90}^3 способами. Отсюда число благоприятных исходов для события A будет $k = C_{10}^2 \cdot C_{90}^3$ (правило произведения). Следовательно,

$$P(A) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{90}^3}{C_{100}^5} = \frac{\dfrac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{90\cdot 89\cdot 88}{1\cdot 2\cdot 3}}{\dfrac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}} \approx 0{,}07\,.$$

5. Каким должно быть минимальное число покупаемых билетов в лотерее примера 4, при котором вероятность получения хотя бы одного выигрыша (событие A) будет больше 0,5?

Р е ш е н и е . Пусть покупается t билетов. Событию $\overline{A}$ (ни одного выигрыша) благоприятны C_{90}^t исходов из общего числа C_{100}^t. Событию же A благоприятны $C_{100}^t - C_{90}^t$ исходов. Отсюда

$$P(A) = \frac{C_{100}^t - C_{90}^t}{C_{100}^t} = 1 - \frac{C_{90}^t}{C_{100}^t} = 1 - \frac{90\cdot 89\cdot\ldots\cdot\big(90-(t-1)\big)}{100\cdot 99\cdot\ldots\cdot\big(100-(t-1)\big)}\,.$$

Обозначим это число p_t. Нам необходимо выяснить, при каком минимальном значении t будет выполняться неравенство $p_t > 0{,}5$. Имеем

$$\frac{90}{100} = 0{,}9 \Rightarrow p_1 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9,$$

$$\frac{90\cdot 89}{100\cdot 99} = 0{,}81 \Rightarrow p_2 = 1 - 0{,}81 = 0{,}19,$$

$$\frac{90\cdot 89\cdot 88}{100\cdot 99\cdot 98} = 0{,}73 \Rightarrow p_3 = 1 - 0{,}73 = 0{,}27,$$

$$\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97} = 0{,}65 \Rightarrow p_4 = 1 - 0{,}65 = 0{,}35,$$

$$\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96} = 0{,}58 \Rightarrow p_5 = 1 - 0{,}58 = 0{,}42,$$

$$\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95} = 0{,}52 \Rightarrow p_6 = 1 - 0{,}52 = 0{,}48,$$

$$\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94} = 0{,}47 \Rightarrow p_7 = 1 - 0{,}47 = 0{,}53$$

(результаты округлены до сотых). Следовательно, при покупке семи билетов (но не менее) вероятность получения хотя бы одного выигрыша будет больше 0,5.

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Какое событие называется суммой событий A и B? Произведением AB? Какое событие обозначается A? Перечислите все случаи наступления события $AB+C$.

3 Объясните, почему верно равенство $A = AB + A\overline{B}$.

3 Докажите равенства $\overline{A+B+C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

3 Что означает событие $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$?

Упражнения

19. Монету бросают дважды. Какова вероятность того, что выпадут разные стороны монеты?

20. Игральную кость бросают 3 раза. Какова вероятность того, что все выпавшие грани окажутся равными?

21. Из 60 вопросов, входящих в программу экзамена, студент выучил 50. Какова вероятность того, что из трех случайно выбранных экзаменатором вопросов он будет знать: 0? 1? 2? 3? Составить таблицу и убедиться, что сумма полученных вероятностей равна 1.

22. Игральную кость бросают дважды. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков окажется не больше 10?

23. В конверте 100 фотокарточек, из них одна нужная. Из конверта наугад извлекают 5 фотокарточек. Какова вероятность того, что среди них окажется нужная?

24. В игре Спортлото "5 из 36" какова вероятность получить выигрыш, полагающийся при угадывании: трех номеров из пяти; четырех номеров из пяти; всех пяти номеров?

25. В группе 20 студентов, из них 6 отличников. Группа случайным образом разделена на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой части по 3 отличника?

26. На пятиместную скамейку случайным образом садятся 5 человек. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

§ 1.3. Геометрические вероятности

В приложениях встречаются задачи, в которых проводимое испытание можно уподобить случайному выбору точки в некоторой области Ω (одномерной, двумерной и т.д.), причем вопрос заключается в том, с какой вероятностью точка попадет в ту или иную часть A (подмножество) множества Ω. Естественно, что при расширении A вероятность попадания в A возрастает. В ряде случаев можно утверждать, что вероятность $P(A)$ попадания точки в A пропорциональна мере (длине, площади и т.д.) множества A, т.е. $P(A) = c\mu(A)$, где $\mu(A)$ – мера множества A, а c = const. Так как $P(\Omega) = 1$, то $c = 1/\mu(\Omega)$, так что

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \qquad (1.6)$$

Вероятности, определяемые формулой (1.6), называют *геометрическими*. Напомним, что Ω – множество всех возможных положений случайной точки, а A – то или иное подмножество в Ω. Предполагается, что и само множество Ω, и рассматриваемые подмножества A имеют меру (длину, площадь, объем и т.д.).

Формулу (1.6) применяют тогда, когда по условию задачи все возможные положения случайной точки в Ω являются "равноправными" (в смысле возможности их выбора).

Примеры

1. Стержень длиной l произвольным образом ломают на три части. Какова вероятность, что из этих частей можно составить треугольник?

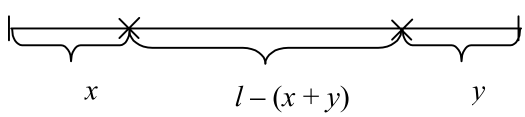
Р е ш е н и е . Обозначим через x и y длины концевых частей стержня; длина третьей части будет, очевидно, $l-(x+y)$. Возможные значения величин x и y связаны условиями:

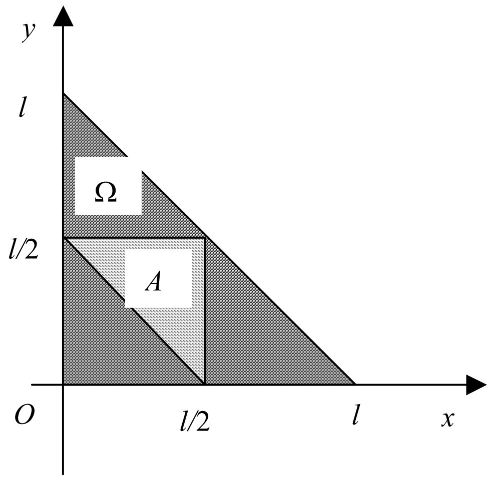
$$0 \le x \le l,$$

$$0 \le y \le l,$$

$$x + y \le l.$$

Система написанных неравенств определяет на координатной плоскости Oxy область Ω, покрытую на рисунке косой штриховкой. Любой разлом стержня равнозначен выбору точки в области Ω.





Для того чтобы из трех частей стержня можно было сложить треугольник, необходимо и достаточно выполнение условий:

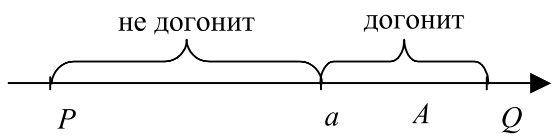
$$\begin{aligned} x &< l - x, \\ y &< l - y, \\ l - (x + y) &< x + y \end{aligned} \qquad (1.7)$$

(мы записали, что каждая сторона треугольника должна быть меньше суммы двух других). Неравенства (1.7) выделяют из Ω область A, зачерченную на рисунке двойной штриховкой.

Будем считать оправданным применение формулы (1.6) (основанием для этого служит «произвольность» разлома стержня). В этом случае можно записать:

$$P(A) = \frac{\text{площадь } A}{\text{площадь } \Omega} = \frac{1}{4}.$$

2. Расстояние между соседними остановками P и Q автобус проходит за 2 минуты, а пешеход – за 15 минут. Интервал движения между автобусами – 25 мин. Некто приходит на остановку P в случайный момент времени и, не застав автобус, идет до Q пешком. Какова вероятность того, что его догонит в пути очередной автобус?



Р е ш е н и е . Обозначим через x время (в минутах), отделяющее момент прихода пассажира на остановку P от момента ухода последнего автобуса. Возможные положения точки x занимают отрезок [0, 25] числовой оси. Догонит или не догонит пассажира очередной автобус, полностью зависит от величины x. Например, если $x = 1$ мин, то не догонит, а если $x = 24$ мин, то догонит. Найдем значение a, отделяющее зону «не догонит» от зоны «догонит». При этом значении пассажир должен прийти в Q одновременно с автобусом. Очевидно, для этого должно выполняться условие $a = 12$ мин. Таким образом, интересующее нас событие A (догонит) выражается условием $x \in [12, 25]$. Поскольку все значения x возможны в одинаковой степени, то по формуле (1.6) имеем $P(A) = \frac{13}{25}$.

Таким образом, более вероятно, что автобус догонит пешехода, чем наоборот.

Упражнения

27. Задача о встрече. Два человека договорились встретиться в определенном месте между двенадцатью и часом дня. При этом было условлено, что пришедший на место свидания первым будет ждать другого только в течение 20 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится, если каждый из договорившихся приходит, когда ему вздумается (но между двенадцатью и часом дня), не согласуя свой приход с другим?

28. На вращающуюся рулетку последовательно бросают три шара. Пусть A, B, C – точки их остановки. Найти вероятность того, что треугольник ABC окажется остроугольным.

29. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов.

30. Даны две концентрические сферы с радиусами r и R ($r < R$) и некоторая точка P на меньшей сфере. В шаровом кольце между сферами берется случайная точка и в ней помещается точечный источник света. Какова вероятность того, что точка P будет освещена?

31. На квадратный паркет со стороной квадрата a брошена наугад монета радиуса r, $r < a$. Какова вероятность того, что остановившаяся монета не пересечет ни одного из ребер паркета?

§ 1.4. Правила сложения и умножения вероятностей

Правило сложения: если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны (никакие два из них не могут наступить вместе в одном испытании), то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Для двух событий A и $\overline{A}$ отсюда следует равенство $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ или

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Вероятность события A при условии, что наступило событие B (*условная вероятность*), определяется формулой

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Из этого определения вытекает формула для вычисления вероятности произведения двух событий:

$$P(AB) = P_B(A) \cdot P(B).$$

Событие A называется *независимым* от B, если $P_B(A) = P(A)$. Для двух независимых событий A и B имеем

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

– *правило умножения* вероятностей для двух событий.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми (в совокупности), если вероятность любого из них не меняется при наступлении какого угодно числа событий из остальных. Правило умножения вероятностей для n событий: если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Вычисление вероятности суммы событий можно свести к вычислению вероятности произведения по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n).$$

В частности, если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, из последнего равенства вытекает: вероятность наступления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна $1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n)$.

Примеры

1. Слово "ЛОТОС", составленное из пяти букв-кубиков, рассыпано на кубики. Из последних наудачу выбираются один за другим три кубика. Какова вероятность того, что они составят в порядке извлечения слово "СТО"?

Решение. Рассмотрим события:

A_1 – первая извлеченная буква оказалась "С",

A_2 – второй извлечена буква "Т",

A_3 – третьей извлечена буква "О",

A – извлеченные буквы составили слово "СТО".

Очевидно,

$$A = A_1A_2A_3.$$

Отсюда имеем

$$P(A)=P(A_1A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{30}.$$

2. Контрольная работа состоит из двух задач по алгебре и двух по геометрии. Для данного учащегося вероятность решения алгебраической задачи равна 0,8, а геометрической 0,6. Какова вероятность получения им удовлетворительной оценки, если для этого требуется решить не менее 3 задач (при этом вероятность решения любой задачи не зависит от того, решены или нет другие задачи из контрольной работы)?

Р е ш е н и е . Введем обозначения: A_i (i = 1, 2) – учащийся решил i-ю задачу по алгебре, $Г_i$ (i = 1, 2) – учащийся решил i-ю задачу по геометрии; B – учащийся получил удовлетворительную оценку. Имеем

$$B=A_1A_2Г_1Г_2+\overline{A}_1A_2Г_1Г_2+A_1\overline{A}_2Г_1Г_2+A_1A_2\overline{Г}_1Г_2+A_1A_2Г_1\overline{Г}_2$$

(в правой части перечислены все варианты получения удовлетворительной оценки). Так как слагаемые правой части – попарно несовместные события, то на основании правила сложения можем записать

$$P(B)=P(A_1A_2Г_1Г_2)+P(\overline{A}_1A_2Г_1Г_2)+P(A_1\overline{A}_2Г_1Г_2)+$$
$$=P(A_1A_2\overline{Г}_1Г_2)+P(A_1A_2Г_1\overline{Г}_2).$$

Подсчитаем, например, слагаемое $P(\overline{A}_1A_2Г_1Г_2)$. Так как события $\overline{A}_1$, A_2, $Г_1$, $Г_2$ по условию независимы, имеем на основании правила умножения

$$P(\overline{A}_1A_2Г_1Г_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)P(Г_1)P(Г_2)=0{,}2\cdot0{,}8\cdot0{,}6\cdot0{,}6.$$

В итоге получим

$$P(B) = 0{,}8^2\cdot0{,}6^2+2\cdot0{,}2\cdot0{,}8\cdot0{,}6^2+2\cdot0{,}8^2\cdot0{,}4\cdot0{,}6=0{,}653.$$

3. Два игрока поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого первым выпадет "герб". Какова вероятность выигрыша для игрока, бросающего монету первым?

Р е ш е н и е . Назовем игрока, делающего первый бросок, игроком 1, а выигрыш им игры – событием A. Событие A распадается на варианты $Г, \overline{ГГ}Г, \overline{ГГГГ}Г, \ldots$, где, например, событие $\overline{ГГ}Г$ означает, что при первом бросании выпал не герб, при втором также не герб, а при третьем – герб. Таким образом,

$$A=Г+\overline{ГГ}Г+\overline{ГГГГ}Г+\ldots.$$

Так как любые два варианта несовместны, то по правилу сложения имеем

$$P(A)=P(Г)+P(\overline{ГГ}Г)+P(\overline{ГГГГ}Г)+\ldots=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\ldots=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, игрок, бросающий первым, имеет вдвое больший шанс выиграть, чем второй игрок.

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Какие события A и B называются несовместными? Что такое "правило сложения вероятностей"?

3 Как записывается "правило сложения вероятностей" в общем случае? Привести вывод. Почему $P(A + B) \le P(A) + P(B)$?

3 Можно ли в опыте с бросанием игральной кости считать элементарными следующие исходы: A – выпадение числа очков ≤ 2, B – выпадение >2 очков?

3 Дайте определение условной вероятности $P_B(A)$. Приведите примеры, когда: 1) $P_B(A) > P(A)$; 2) $P_B(A) < P(A)$; 3) $P_B(A) = P(A)$.

3 Когда события A и B называются независимыми? Приведите примеры. Почему из независимости A и B следует: независимость B и A; независимость A и B; независимость A и B?

3 Как соотносятся понятия "независимые события A и B" и "несовместные события A и B"? Приведите примеры.

3 Что такое правило умножения вероятностей: а) для независимых событий A и B; б) для любых A и B?

3 Как определяется независимость в случае трех событий? Рассмотрите пример: пусть в опыте с бросанием двух монет события A, B, C означают: A – на первой монете выпал герб; B – на второй монете выпал герб; C – обе монеты упали на одну сторону. Проверьте, что любые два из событий A,B,C независимы. Будут ли независимы все три события?

Упражнения

32. Монету бросают 10 раз. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

33. Сколько раз нужно бросить монету, чтобы вероятность выпадения хотя бы один раз герба была больше 0,5? больше 0,9?

34. Среди облигаций займа половина выигрышных. Сколько облигаций нужно купить, чтобы с вероятностью $\geq 0{,}95$ можно было ожидать появление хотя бы одного выигрыша?

35. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы вероятность выпадения хотя бы один раз грани "6" была больше 0,9?

36. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью $\geq 0{,}5$ можно было надеяться, что хоть раз появится 12 очков?

37. Абонент забыл последнюю цифру телефонного номера и набирает ее наугад. Найти вероятность того, что ему придется сделать не более двух неудачных попыток.

38. Два равносильных партнера играют матч из ряда партий. Ничьи невозможны. При достижении одним из игроков двух побед подряд матч прекращается, и объявляется победа этого игрока. Какова вероятность того, что матч окончится до пятой партии?

39. Для приема партии готовых изделий применяется выборочный контроль. Для контроля берут наугад 5 изделий; если среди них окажется больше одного бракованного, то бракуется вся партия. Какова вероятность того, что при таком способе контроля партия, состоящая из 90 стандартных изделий и 10 бракованных, будет забракована?

40. Три игрока поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого первым выпадет герб. Какова вероятность выигрыша для того из них, кто сделает первое бросание? кто делает второе?

41. В урне находятся 4 белых и 3 черных шара. Два игрока поочередно извлекают по шару (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вытащит белый шар. Какова вероятность выигрыша для начинающего игру?

42. По данным переписи населения в некоторой местности установлено: пары из темноглазых отцов (событие A) и темноглазых сынов (событие B) составляют 5% от всех обследованных пар; пары темноглазых отцов и светлоглазых сынов – 7,9%, светлоглазых отцов и темноглазых сынов – 8,9%; светлоглазых отцов и светлоглазых сынов – 78,2%. Исследуйте связь между цветом глаз отца и сына, найдя вероятности $P_A(B), P_{\overline{A}}(B), P_A(\overline{B}), P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

43. Для повышения надежности компьютера он дублируется другим точно таким же компьютером; надежность (вероятность безотказной работы) каждого компьютера равна p. При выходе из строя первого компьютера происходит мгновенное переключение на второй; надежность переключающего устройства равна единице. Определить надежность системы двух дублирующих друг друга компьютеров.

44. Та же задача, но надежность переключающего устройства равна p_1 (а не 1).

45. Производятся испытания некоторого прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью 0,01. После первого выхода из строя прибор ремонтируется, после второго – признается негодным. Найдите вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя при третьем испытании.

46. Некий гражданин, располагая суммой 3 млн рублей, решил вложить по одному миллиону в каждый из трех банков под 60% годовых. Вероятность банкротства любого из банков равна 0,1. Какова вероятность того, что по истечении года гражданин получит обратно, по меньшей мере, вложенную сумму 3 млн.?

47. Вероятность того, что за время, необходимое операционисту в банке для обслуживания одного клиента, не подойдет новый клиент, равна 0,3; вероятность того, что подойдет один новый клиент – 0,2; два – 0,2; три – 0,1; более трех – 0,1. Определить вероятность того, что за время обслуживания одного клиента:

а) очередь не увеличится;

б) очередь увеличится не менее чем на два клиента.

§ 1.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

События H_1, H_2, …, H_n образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и при каждом испытании обязательно наступает хотя бы одно из этих событий.

Если события H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу, то для любого события A справедливо равенство

$$P(A)=P_{H_1}(A)P(H_1)+P_{H_2}(A)P(H_2)+\ldots+P_{H_n}(A)P(H_n)$$

(формула полной вероятности). При этом события H_1, H_2, …, H_n называют *гипотезами*.

В тех же предположениях справедлива формула

$$P_A(H_i)=\frac{P_{H_i}(A)P(H_i)}{P_{H_1}(A)P(H_1)+P_{H_2}(A)P(H_2)+\ldots+P_{H_n}(A)P(H_n)}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

называемая также формулой вероятностей гипотез или *формулой Байеса*. Формула Байеса дает ответ на вопрос: каков процент испытаний, в которых осуществляется гипотеза H_i, среди всех испытаний, где наступает A.

Примеры

1. В одной из урн находятся 4 белых шара и 5 черных, в другой 1 белый и 3 черных. Из каждой урны наудачу выбран шар, а из двух выбранных шаров наудачу взят один. Какова вероятность того, что этот шар окажется белым (событие A)?

Решение. Возможны 4 случая:

$$H_{бб},\ H_{бч},\ H_{чб},\ H_{чч},$$

где, например, $H_{бч}$ означает, что из первой урны был выбран белый шар, а из второй – черный. Указанные четыре события несовместны и образуют полную группу. По формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=P_{H_{бб}}(A)P(H_{бб})+P_{H_{бч}}(A)P(H_{бч})+$$
$$+P_{H_{чб}}(A)P(H_{чб})+P_{H_{чч}}(A)P(H_{чч}).$$

Подсчитаем для примера второе слагаемое. Ввиду независимости результатов извлечения из первой и второй урны имеем $P(H_{бч})=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}$; условная же вероятность $P_{H_{бч}}(A)$, очевидно, равна $\frac{1}{2}$. Найдя таким же образом остальные вероятности, получим

$$P(A)=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot 0=\frac{25}{72}\approx 0{,}35\,.$$

2. Студент пришел на экзамен не полностью готовым: он выучил лишь k билетов из n. В каком случае вероятность вытащить "хороший" билет (событие A) для него выше: когда он берет билет первым или вторым?

Решение. Пусть студент X берет билет первым. Тогда очевидно, что

$$P(A)=\frac{k}{n}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда X берет билет вторым. Тогда имеются две возможности:

H_1 – студент, взявший билет до студента X, вытащил "хороший" (с точки зрения X) билет;

H_2 – студент, взявший билет до X, вытащил плохой билет.

События H_1 и H_2 несовместны и образуют полную группу. По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A)=P_{H_1}(A)P(H_1)+P_{H_2}(A)P(H_2)=\frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{k}{n}+\frac{k}{n-1}\cdot\frac{n-k}{n}=$$

$$=\frac{k}{n}\left(\frac{k-1}{n-1}+\frac{n-k}{n-1}\right)=\frac{k}{n}.$$

Мы видим, что вероятность вытащить хороший билет не зависит от того, каким по счету – первым или вторым – подходит студент X к столу экзаменатора.

Постарайтесь объяснить логически, почему это так. Вообще, постарайтесь объяснить, что вероятность для студента вытащить хороший билет не зависит от того, каким по счету (первым, вторым, третьим и т.д.) он берет билет; важно лишь то, что, войдя в аудиторию, студент не знает, какие билеты извлекались до него.

3. Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается некоторой упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,98, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,05. Какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия? Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее проверку, не содержит брака?

Решение. Для любого изготовленного изделия возможны два случая:

H_1 – изделие не содержит брака, H_2 – изделие бракованное.

Пусть событие A заключается в том, что изделие признается в результате проверки годным. Имеем

$$P(A)=P_{H_1}(A)P(H_1)+P_{H_2}(A)P(H_2)=0{,}98\cdot 0{,}96+0{,}05\cdot 0{,}04=0{,}9428\,.$$

Таким образом, в готовую продукцию идет 94,28% всех изготовленных изделий.

При ответ на второй вопрос задачи требуется найти условную вероятность $P_A(H_1)$. По формуле Байеса имеем

$$P_A(H_1)=\frac{P_{H_1}(A)P(H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}98\cdot 0{,}96}{0{,}9428}=0{,}9979\,.$$

Таким образом, среди изделий, выдержавших испытание, стандартные изделия составляют 99,79%, а бракованные – 0,21%.

Рассмотрим пример более сложной задачи.

4. (Задача о разорении игрока). Два игрока I и II играют ряд партий – полного разорения одного из них. Капитал первого игрока равен a рублей, второго – b рублей. В каждой партии выигрыш одного игрока (а значит, проигрыш другого) равен 1 руб. (ничьих не бывает). Вероятность выигрыша каждой партии для игрока I равна α, а для игрока II равна β ($\alpha+\beta=1$). Найти вероятность разорения для каждого из игроков (результаты отдельных партий предполагаются независимыми).

Решение. Суммарный капитал $a + b$ обоих игроков остается в процессе игры неизменным. Обозначим его S. Далее, обозначим p_z вероятность разорения игрока I при его начальном капитале z (и суммарном S). Очередную партию игрок I может выиграть (событие H_1) и может проиграть (событие H_2). Применяя формулу полной вероятности, получим

$$p_z=P(A)=P_{H_1}(A)P(H_1)+P_{H_2}(A)P(H_2)=p_{z+1}\cdot\alpha+p_{z-1}\cdot\beta\,.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$p_z=\alpha p_{z+1}+\beta p_{z-1}. \qquad (1.8)$$

При этом надо учесть, что

$$p_0=1,\ p_S=0 \qquad (1.9)$$

(если в начале игры игрок I не имеет ничего, то он уже разорен, то же относится и к игроку II).

Из соотношения (1.8) вместе с краевыми условиями (1.9) мы можем найти последовательно весь ряд чисел $p_0, p_1, \ldots, p_S$.

Равенство (1.8) можно переписать в виде:

$$(\alpha+\beta)p_z=\alpha p_{z+1}+\beta p_{z-1}$$

или

$$\alpha(p_{z+1}-p_z)=\beta(p_z-p_{z-1});$$

отсюда

$$p_{z+1}-p_z=\frac{\beta}{\alpha}(p_z-p_{z-1}).$$

Таким образом, числа

$$p_1 - p_0,\, p_2 - p_1,\, \ldots,\, p_S - p_{S-1} \qquad (1.10)$$

образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{\beta}{\alpha}$. Сумма членов этой прогрессии от первого до z-го (z – любое из чисел 1, 2, …, S) равна

$$(p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) + \ldots + (p_z - p_{z-1}) = p_z - p_0.$$

С другой стороны, по формуле суммы членов геометрической прогрессии имеем при $q \neq 1$ (т.е. $\alpha \neq \beta$):

$$p_z - p_0 = (p_1 - p_0)\frac{q^z - 1}{q - 1}$$

или

$$p_z - 1 = (p_1 - 1)\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^z - 1}{\frac{\beta}{\alpha} - 1} \quad (z = 1, 2, \ldots, S). \qquad (1.11)$$

Остается найти p_1. Для этого положим $z = S$, получим

$$0 - 1 = (p_1 - 1)\frac{\left(\frac{\beta}{a}\right)^S - 1}{\frac{\beta}{\alpha} - 1}, \quad \text{т.е.} \quad p_1 - 1 = -\frac{\frac{\beta}{\alpha} - 1}{\left(\frac{\beta}{a}\right)^S - 1}.$$

Подставляя данное выражение в (1.11), получим

$$p_z = 1 - \frac{\frac{\beta}{\alpha} - 1}{\left(\frac{\beta}{a}\right)^S - 1} \cdot \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^z - 1}{\frac{\beta}{\alpha} - 1} = 1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^z - 1}{\left(\frac{\beta}{a}\right)^S - 1}.$$

В частности, если начальный капитал игрока I равен a, а игрока II равен b (тогда $S = a + b$), находим

$$p_a = 1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^a - 1}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{a+b} - 1}, \qquad (1.12)$$

что и дает ответ на поставленный вопрос, если $\alpha \neq \beta$.

Остается рассмотреть случай $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, т.е. когда игроки имеют равную силу. Тогда все числа (1.10) равны между собой; так как при этом их сумма равна $p_S - p_0 = -1$, то каждое из них равно $-\frac{1}{S}$. В частности, $p_1 - p_0 = -\frac{1}{S}$ или $p_1 = 1 - \frac{1}{S}$. Далее, $p_2 - p_1 = -\frac{1}{S}$, т.е. $p_2 = 1 - \frac{2}{S}$ и так далее, так что $p_z = 1 - \frac{z}{S}$. Итак,

$$p_a = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}.$$

Таким образом, в случае равносильных партнеров вероятность разорения любого из игроков совпадает с долей капитала другого игрока в суммарном капитале обоих игроков.

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Что такое полная группа событий? Образуют ли полную группу события A и $\overline{A}$?

3 Выведите формулу полной вероятности. Приведите примеры.

3 Выведите формулу Байеса. Приведите примеры.

Упражнения

48. На фабрике, изготовляющей болты, машины I, II и III производят соответственно 25%, 35% и 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Каков процент брака на предприятии? Если случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным, то какова вероятность того, что он был произведен на машине I, II, III?

49. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Считая, что всех мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что случайно выбранное лицо окажется дальтоником. Пусть наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

50. Из 5 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,4.

а) Что вероятнее: попадет в цель наугад выбранный стрелок или нет?

б) Наугад выбранный стрелок попал в цель. Что вероятнее: принадлежит он к первым двум или к трем последним?

51. Имеются две урны. В первой 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 3 черных. Из первой урны наугад перекладывают во вторую один шар, после чего из второй урны извлекают шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

52. Те же две урны, что и в задаче 51, но перекладывают из первой во вторую два шара, после чего из второй урны берут один. Какой состав переложенных шаров наиболее вероятен, если извлеченный шар оказался белым?

53. Известно, что 96% выпускаемых заводом изделий отвечают стандарту. Упрощенная система контроля признает годной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Определите вероятность того, что изделие, дважды успешно прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.

54. Для сдачи экзамена студентам было необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили все вопросы, 6 – 20 вопросов и 2 – 5 вопросов. Вызванный студент ответил на поставленный вопрос. Найдите вероятность того, что этот студент: а) подготовил все вопросы; б) подготовил только половину вопросов.

55. Имеется 10 монет, причем 9 из них обычные, а у одной вследствие заводского брака с обеих сторон отчеканен герб. Наугад выбранную монету, не разглядывая, бросают 10 раз, причем при всех бросаниях она ложится гербом сверху. Найдите вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами.

56. В задаче о разорении игрока найдите вероятность выигрыша для игрока I, если его начальный капитал составляет 10 руб., а начальный капитал второго игрока – 90 руб.; при этом вероятность выигрыша игроком I каждой партии в 9 раз больше, чем вероятность выигрыша игрока II.

57. При переливании крови нужно учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой можно перелить кровь только первой группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% – вторую, 20,9% – третью и 7,9% – четвертую группы крови. Найдите вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора (тем самым выясните, сколько процентов переливаний были смертельными до открытия групп крови).

58. (*Задача-шутка*). Некий властелин, которому наскучил его звездочет со своими предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи "добрым" повелителем, он решил дать звездочету последний шанс. Ему велено распределить по двум урнам 4 шара: 2 белых и 2 черных. Палач выберет наугад одну из урн и наугад из нее вытащит один шар. Если шар окажется черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен разместить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность быть спасенным?

§ 1.6. Независимые испытания. Схема Бернулли. Приближенные формулы Лапласа и Пуассона

Несколько испытаний называются *независимыми*, если вероятность того или иного исхода в любом из этих испытаний не зависит от исхода других испытаний.

Схема Бернулли: производится n независимых испытаний, в каждом из которых с одной и той же вероятностью p наступает некоторое событие A (называемое обычно "успехом") и, следовательно, с вероятностью $q = 1 - p$ наступает событие $\overline{A}$, противоположное A.

Пусть k – любое из чисел 0, 1, 2, …, n. Обозначим $P_n(k)$ вероятность того, что в n испытаниях Бернулли успех наступит k раз. Справедлива *формула Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{1.13}$$

Рассмотрим числа $P_n(0)$, $P_n(1)$, …, $P_n(n)$.

Какое из них является наибольшим? Иначе говоря, на какое число успехов падает наибольшая вероятность? Ответ состоит в том, что это число – так называемое *наивероятнейшее число успехов* – приближенно равно np. Точнее: если число $\alpha = np + p$ является целым, то максимум чисел $P_n(k)$ достигается при $k = \alpha$ и $k = \alpha - 1$; если же α – не целое, то максимум достигается при целом, ближайшем слева к числу α.

Локальная приближенная формула Муавра–Лапласа. При больших n имеет место приближенное равенство

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{1.14}$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса (таблицу значений функции Гаусса см. в приложении).

Интегральная приближенная формула Муавра–Лапласа. При больших n имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.15}$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Функция $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа* (таблицу ее значений см. в приложении). Для нахождения значений $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ при отрицательных x следует иметь в виду, что функция Гаусса $\varphi(x)$ – четная, а функция Лапласа $\Phi(x)$ – нечетная.

Приближенными формулами (1.14) и (1.15) на практике пользуются, если $npq \ge 10$. Если же $npq < 10$, то эти формулы приводят к довольно большим погрешностям.

Из формулы (1.15) вытекает другая приближенная формула: при заданном $\varepsilon > 0$ и большом n вероятность события $\left|\dfrac{k}{n} - p\right| < \varepsilon$ близка к $2\Phi\left(\dfrac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$. Обозначая дробь $\dfrac{k}{n}$ через w (относительная частота успеха), получим

$$P(|w - p| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{1.16}$$

Приближенная формула Пуассона. При больших n и малых p справедлива формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{1.17}$$

где $\lambda = np$ (таблицу значений функции $P_n(\lambda) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ см. в приложении).

Примеры

1. Монета брошена 10 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) 5 раз; б) от 4 до 6 раз; в) хотя бы один раз.

Р е ш е н и е . а) По формуле Бернулли имеем

$$P_{10}(5)=C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{63}{256}\approx 0{,}25\,.$$

б) $$P_{10}(4\le k\le 6)=P_{10}(4)+P_{10}(5)+P_{10}(6)=$$

$$=C_{10}^{4}\cdot\frac{1}{2^{10}}+C_{10}^{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}+C_{10}^{6}\cdot\frac{1}{2^{10}}\approx 0{,}66\,.$$

в) $$P_{10}(1\le k\le 10)=1-P_{10}(0)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1023}{1024}\approx 0{,}999\,.$$

2. Найти наиболее вероятное число выпадений герба при 25 бросаниях монеты; при 100 бросаниях.

Р е ш е н и е . В первом случае $n = 25$, $p = 0{,}5$. Число $\alpha = np + p = 25\cdot 0{,}5 + 0{,}5 = 13$ – целое, поэтому имеются два наиболее вероятных числа гербов: 13 и 12.

Во втором случае $n = 100$, $p = 0{,}5$. Число $\alpha = np + p = 100\cdot 0{,}5 + + 0{,}5 = 50{,}5$ – не целое, поэтому наиболее вероятное число гербов равно ближайшему к α слева целому числу, т.е. 50.

3. Контрольная работа состоит из 5 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответа, из которых только один правильный. Учащийся не готов к контрольной и поэтому выбирает ответы наугад. Какова вероятность того, что он правильно ответит на k вопросов ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)?

Р е ш е н и е . Рассматривая выбор ответа на тот или иной вопрос, как отдельное испытание, а получение правильного ответа как некоторое событие A ("успех"), будем иметь: $n = 5,\ p=\frac{1}{4},\ q=\frac{3}{4}$.

Наша задача – найти вероятности

$$P_5(0),\ P_5(1),\ P_5(2),\ P_5(3),\ P_5(4),\ P_5(5).$$

Имеем

$$P_5(0)=\left(\frac{3}{4}\right)^{5}=\frac{243}{1024}\approx 0{,}24\,,$$

$$P_5(1)=C_5^{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{4}=\frac{5\cdot 81}{1024}\approx 0{,}4\,,$$

$$P_5(2)=C_5^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=\frac{10\cdot 27}{1024}\approx 0{,}27\,,$$

$$P_5(3)=C_5^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\frac{10\cdot 9}{1024}\approx 0{,}09\,,$$

$$P_5(4)=C_5^{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}=\frac{5\cdot 1}{1024}\approx 0{,}005\,,$$

$$P_5(5)=\left(\frac{1}{4}\right)^{5}=\frac{1}{1024}\approx 0{,}001\,,$$

4. Вероятность наступления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна $p = 0{,}8$. Найдите вероятность того, что событие A произойдет: а) 750 раз; б) от 710 до 740 раз.

Р е ш е н и е . В данном случае n велико: $n = 900$, $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Так как $npq = 900\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 = 144 > 10$, то для нахождения $P_{900}(750)$ воспользуемся формулой (1.14), а для нахождения $P_{900}(710 \le k \le 740)$ – формулой (1.15).

а) $x = \dfrac{750 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{144}} = 2{,}5$; $\varphi(2{,}5) = 0{,}0175$,

$P_{900}(750) \approx \dfrac{1}{12}\varphi(2{,}5) = \dfrac{0{,}0175}{12} \approx 0{,}0015$.

б) $x_1 = \dfrac{710 - 720}{12} \approx -0{,}83$, $x_2 = \dfrac{740 - 720}{12} \approx 1{,}67$,

$\Phi(-0{,}83) = -\Phi(0{,}83) \approx -0{,}2967$, $\Phi(1{,}67) \approx 0{,}4525$;

$P_{900}(710 \le k \le 740) \approx 0{,}4525 + 0{,}2967 = 0{,}7492$.

5. Вероятность того, что электролампочка, изготовленная данной фабрикой, является бракованной, равна 0,02. Для контроля отобрано наугад 100 лампочек. Оцените вероятность того, что частота бракованных лампочек в выборке отличается от вероятности 0,02 менее чем на 0,01.

Решение. В данном случае воспользуемся формулой (1.16), считая n = 100; p = 0,02; q = 0,98; ε = 0,01. Получим

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{100}{0{,}02 \cdot 0{,}98}} = \frac{0{,}01 \cdot 10}{0{,}14} \approx 0{,}7 .$$

$$P(|\mu - 0{,}02| < 0{,}01) \approx 2\Phi(0{,}7) \approx 2 \cdot 0{,}2580 = 0{,}5016.$$

6. У страховой компании имеется 12 тыс. клиентов. Каждый из них, страхуясь от несчастного случая, вносит 10 тыс. руб. Вероятность несчастного случая p = 0,006, а выплата пострадавшему составляет 1 млн руб. Какая прибыль обеспечивается страховой компании с вероятностью 0,995?

Решение. Суммарный взнос всех клиентов равен 12000 · 10000 = 120 млн руб. Прибыль П компании зависит от числа k нечастных случаев и определяется равенством

$$\text{П} = 120000 - 1000k \text{ тыс. руб.}$$

Наша задача – найти такое число M, чтобы вероятность события $P(k > M)$ не превосходила 0,005; тогда с вероятностью 0,995 будет обеспечена прибыль П.

Неравенство $P(k > M) \le 0{,}005$ равнозначно неравенству $P(k \le M) > 0{,}995$. Учитывая, что $k \ge 0$, можем уточнить последнее неравенство:

$$P(0 \le k \le M) > 0{,}995.$$

Для оценки вероятности $P(0 \le k \le M)$ воспользуемся интегральной приближенной формулой Муавра – Лапласа при n = 12000, p = 0,006, q = 0,994 (очевидно, что npq >10). Имеем

$$P_{12000}(0 \le k \le M) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{0 - 12000 \cdot 0{,}006}{\sqrt{12000 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994}} = -8{,}\ldots$, а $x_2 = \dfrac{M - 72}{\sqrt{72 \cdot 0{,}994}}$. Так как $x_1 < -8$, то $\Phi(x_1) = -0{,}5$. Итак, необходимо найти значение M, при котором

$$\Phi\left(\frac{M - 72}{8{,}5}\right) + 0{,}5 \ge 0{,}995$$

или $\Phi\left(\dfrac{M - 72}{8{,}5}\right) \ge 0{,}495$. По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим, что должно выполняться неравенство

$$\frac{M - 72}{8{,}5} \ge 2{,}58 ,$$

следовательно, $M \ge 72 + 22 = 94$. Итак, с вероятностью 0,995 компании гарантируется прибыль

$$\text{П} = 120 - 94 = 26 \text{ млн руб.}$$

7. В среднем левши составляют 1%. Найти вероятность того, что в аудитории из 200 студентов окажется: а) ровно 2 левши; б) не менее, чем 4 левши.

Решение. В данном случае $n = 200$ достаточно велико, но $npq = 200 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99 = 2 < 10$. Поэтому для оценок воспользуемся не приближенными формулами Лапласа, а формулой (1.17) Пуассона. Имеем $\lambda = np = 2$, поэтому

$$P_{200}(2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx 0{,}27 .$$

Для ответа на второй вопрос задачи нужно оценить вероятность события $k \geq 4$ (где k – число "успехов", т.е. студентов, являющихся левшами). Противоположное событие будет $k < 4$, а его вероятность равна

$$P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) + P_{200}(3) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} + \frac{2^3}{3!} e^{-2}$$

С помощью таблицы значений функции $\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ при $\lambda = 2$ находим, что указанная сумма равна 0,86. Следовательно, вероятность обнаружить в аудитории не менее чем 4 левши будет 0,14.

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Когда несколько опытов называются независимыми? Приведите примеры.

3 Что такое схема Бернулли? Какими числами задается схема Бернулли?

3 Выведите формулу для вероятностей $P_n(k)$ в схеме Бернулли. Чему равна сумма $\sum_{k=0}^{n} P_n(k)$?

3 Опишите поведение вероятности $P_n(k)$ как функции от k. При каком k эта функция достигает максимума? Укажите содержательный смысл результата.

3 Укажите выражение для функции Лапласа. Докажите нечетность этой функции.

Упражнения

59. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях монеты герб выпадет k раз? Подсчитайте эту вероятность при всех возможных k ($k = 0, 1, 2, \ldots, 10$) и составьте таблицу.

60. Что более вероятно: выиграть у равносильного противника 2 партии из 4 или 4 из 8 (ничьи не в счет)?

61. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании монеты сработает правильно, равна 0,97. Сколько нужно опустить монет, чтобы наиболее вероятное число правильных срабатываний было равно 100?

62. Вероятность наступления события A в каждом из 18 независимых испытаний равна 0,2. Определите вероятность появления события A по крайней мере 3 раза.

63. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найдите вероятность того, что: а) у обоих будет одинаковое количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

64. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Оцените вероятность того, что из 100 покупателей потребуют обувь 41-го размера: а) 25 человек; б) не более 30 человек.

65. Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие A появится не менее 75 раз?

66. Учебник издан тиражом 10 000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

67. Известный французский естествоиспытатель Бюффон произвел 4040 бросаний монеты и зафиксировал 2048 выпадений герба. Найдите вероятность того, что при повторении опыта Бюффона частота появления герба отклонится от 0,5 не более чем в опыте Бюффона.

Глава 2

Случайные величины

§ 2.1. Дискретные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины

Величина, принимающая в результате испытания (опыта) определенное значение, называется *случайной величиной*. Если значение величины известно до испытания, то такая величина называется *константой*.

Пусть X – случайная величина, $A \subset \mathbf{R}$ – числовое множество. Условие $\{X \in A\}$ рассматривается как событие, наступающее тогда и только тогда, когда X в результате испытания примет значение, принадлежащее множеству A. Случайная величина X называется *дискретной*, если существует конечное или счетное множество $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$, такое, что $P(X \in S) = 1$. Числа $x_1, x_2, \ldots$ называются *возможными значениями* случайной величины X.

Пусть $p_i = P(X = x_i)$ – вероятность i-го возможного значения. Для различных возможных значений $x_i \neq x_j$ события $X = x_i$ и $X = x_j$ несовместны. Применяя правило сложения вероятностей для несовместных событий, получим

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_i .$$

Таблица

X	x_1	x_2	…
P	p_1	p_2	…

называется *законом распределения* (или *распределением*) дискретной случайной величины X. Из приведенных выше рассуждений следует, что сумма чисел во второй строке этой таблицы равна 1.

Для любой случайной величины X *функция распределения* определяется формулой $F(x) = P(X < x)$. В случае дискретной случайной величины X функция распределения имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i ,$$

т.е. функция $F(x)$ – ступенчатая функция со скачками в точках $x_1, x_2, \ldots$, причем величины скачков равны соответственно $p_1, p_2, \ldots$.

Примеры

1. Пусть X – процентное изменение стоимости акций в отношении к текущему курсу через один месяц в будущем. Вероятностный прогноз для величины X представлен в виде распределения

X	–5	0	5	10	15
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Какова, согласно прогнозу, будет вероятность того, что покупка акции будет более выгодна, чем помещение денег на вклад при ставке банковского процента 60% годовых?

Решение. Увеличение суммы на вкладе составит 60/12 = 5 процентов. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(X > 5) = P(X = 10) + P(X = 15) = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

2. Банк выдал 5 кредитов, оценив вероятность невозврата денег в 0,1 для каждого из 5 заемщиков. Пусть X – количество заемщиков, не вернувших денег по истечении установленного срока. Составить закон распределения X, считая, что заемщики друг с другом никак не связаны.

Решение. Пусть A_i – событие, состоящее в том, что i-й заемщик ($i = 1, \ldots, 5$) не вернул денег. Так как заемщики друг с другом не связаны, то можно считать, что события $A_1, A_2, \ldots, A_5$ независимы. Следовательно, применима формула Бернулли: $P(X = k) = C_k^5 0{,}1^k 0{,}9^{5-k}$ ($k = 0, 1, \ldots, 5$). Вычисляя вероятности $P(X = k)$, находим закон распределения X.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

3. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Пусть X – число стандартных деталей среди отобранных. Случайная величина X может принимать следующие возможные значения: 0, 1 и 2. Вероятность каждого значения находится по формуле $P(X = k) = \dfrac{C_7^k \cdot C_3^{2-k}}{C_{10}^2}$, где C_7^k – число способов выбора стандартных деталей, C_3^{2-k} – число способов выбора нестандартных деталей, C_{10}^2 – число способов выбора двух деталей из 10.

Находим закон распределения

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Что такое случайная величина, дискретная случайная величина? Может ли таблица

X	-8	3	-1
P	0,5	0,1	0,3

рассматриваться как закон распределения дискретной случайной величины?

3 Дана дискретная случайная величина с законом распределения

X	x_1	x_2	...
P	p_1	p_2	...

. Как найти вероятность $P(a < X < b)$?

3 Что понимается под суммой (разностью, произведением, частным) двух случайных величин?

Упражнения

1. Прогноз будущей инфляции через три месяца в процентах к текущему уровню цен задан распределением

X	0	5	10	15	20	25	30
P	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

Текущая ставка по трехмесячным кредитам 110% годовых. Текущая ставка по трехмесячным вкладам 50% годовых. Какова вероятность того, что реальный процент по кредитам будет положительным, а по вкладам – отрицательным?

2. Экзаменатор задает студенту вопросы до тех пор, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигнет четырех, либо студент ответит неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос 2/3. Составить закон распределения для числа заданных вопросов.

3. Имеется три банка, обещающих своим вкладчикам 100% годовых дохода в реальных ценах. Вероятность разорения такого банка в течение месяца равна 0,5. Пусть X – число разорившихся банков в течение месяца среди упомянутых трех банков. Составить закон распределения X, считая, что разорение некоторого банка не влияет на вероятность разорения других банков.

4. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Случайно отобраны три детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

5. Подбрасываются две игральные кости. Составить закон распределения для: а) суммы двух выпавших чисел, б) максимума выпавших чисел.

6. Дискретная случайная величина X принимает целые значения от 0 до 9 с равной вероятностью. Вероятность всех прочих значений равна 0. Составить закон распределения X.

7. Распределение дискретной случайной величины X определяется формулой $P(X=i)=\dfrac{1}{5}$, i = –2, –1, 0, 1, 2. Найти распределение случайной величины $|X|$.

8. Распределение дискретной случайной величины X определяется формулой

$$P(X=k)=\frac{C}{2^k},\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Найти а) константу C; б) вероятность $P(X \le 3)$.

9. Распределение дискретной случайной величины X задано формулой $P(X = k) = Ck^2$, где k = 1, 2, 3, 4, 5. Найти а) константу C; б) вероятность события $|X - 2| \le 1$.

10. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	1	2	3	4	5
P	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Найти условную вероятность события $X < 5$ при условии, что $X > 2$.

11. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	–2	–1	0	1	2
P	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2

Найти условную вероятность события $X \ge 0$ при условии, что $|X| < 2$.

§ 2.2. Независимые дискретные случайные величины

Произвольные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если независимы всякие n событий вида $\{X_1 \in B_1\}, \{X_2 \in B_2\}, \ldots, \{X_n \in B_n\}$ ($B_1, B_2, \ldots, B_n$ – подмножества $\mathbf{R}$). Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ являются независимыми, если для любого набора возможных значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется равенство

$$P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n) = P(X_1 = a_1)P(X_2 = a_2)\ldots P(X_n = a_n).$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые дискретные случайные величины и $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x)$ – произвольные числовые функции. Тогда случайные величины $Y_1 = q_1(X_1)$, $Y_2 = q_2(X_2)$, …, $Y_n = q_n(X_n)$ также независимы.

Если $И_1, И_2, \ldots, И_n$ – независимые испытания, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – случайные величины такие, что X_j (j = 1, 2, …, n) полностью определяются исходом испытания $И_j$, то $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины.

Примеры

1. Пусть X – размер выигрыша по первому лотерейному билету, Y – по второму. Если билеты относятся к различным выпускам, то X и Y независимы, так как их значения определяется в независимых испытаниях – тиражах различных выпусков. Если оба билета одного выпуска, то выигрыш по первому билету уменьшает вероятность выигрыша по второму билету. Пусть $a > 0$ – размер возможного выигрыша. Тогда $P_{X=a}(Y = a) < P(Y = a)$. Так как $P_{X=a}(Y = a) = P(X = a,\ Y = a)/P(X = a)$, то, умножив обе части неравенства на $P(Y = a)$, получим $P(X = a,\ Y = a) < P(X = a)\ P(Y = a)$. Следовательно, X и Y зависимы.

2. Монета подбрасывается 100 раз. Обозначим X_i (i = 1, 2, …., 10) количество гербов, выпавших в i – том десятке бросков. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ независимы, так как вычисляются по результатам независимых испытаний.

3. Фирма заключила два независимых договора. Пусть X_1, X_2 – убытки от нарушения соответствующего договора. Составить закон распределения суммарного убытка $X = X_1 + X_2$, если распределения X_1 и X_2 имеют вид

X_1	0	1
P	0,9	0,1

X_2	0	3	4
P	0,7	0,2	0,1

Решение. Имеем $X = 0 \Leftrightarrow X_1 = 0$ и $X_2 = 0$. Следовательно, $P(X = 0) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}63$. Далее аналогично:

$X = 1 \Leftrightarrow X_1 = 1$ и $X_2 = 0$. $P(X = 1) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07$.

$X = 3 \Leftrightarrow X_1 = 0$ и $X_2 = 3$. $P(X = 3) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}18$.

$X = 4 \Leftrightarrow X_1 = 0$ и $X_2 = 4$ или

$X_1 = 1$ и $X_2 = 3$. $P(X = 4) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}11$.

$X = 5 \Leftrightarrow X_1 = 1$ и $X_2 = 4$. $P(X = 5) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$.

Итак,

X	0	1	2	3	4
P	0,63	0,07	0,18	0,11	0,01

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Какие случайные величины называются независимыми?

3 *Индикатором* события A называется случайная величина, принимающая значение 1 (соответственно, 0), если A наступает (соответственно, не наступает). Почему индикатор – дискретная случайная величина?

3 Пусть A, B, C – независимые события, I_A, I_B, I_C – их индикаторы. Докажите независимость случайных величин I_A, I_B, I_C.

Упражнения

12. Пусть p – цена, $S(p)$ – функция предложения, $D(p)$ – функция спроса. Найти распределение равновесной цены p_e, если $S(p) = p,\ D(p) = \dfrac{A}{p+B}$, где A и B – независимые случайные факторы, заданные распределениями

A	25	81
P	0,5	0,5

B	0	24
P	0,6	0,4

13. Случайные величины X_1, X_2 независимы и имеют одинаковое распределение

X_i	0	1	2	3
P	1/4	1/4	1/4	1/4

а) Найти вероятность события $X_1 + X_2 > 2$;

б) Найти условную вероятность $P_{X_1+X_2>2}(X_1 = 3)$.

14. Дискретные случайные величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют одинаковое распределение

X_i	0	1	2	3	4

P	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Пусть Y – максимум чисел X_1, X_2, X_3. Найти распределение Y.

15. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Пусть Y_n – остаток от деления X на n (n = 2 или 3). Верно ли, что Y_1 и Y_2 независимы?

16. Дискретные случайные величины X, Y и их произведение $X \cdot Y$ имеют следующие распределения:

X	0	2
P	0,5	0,5

Y	0	5
P	0,6	0,4

$X \cdot Y$	0	10
P	0,8	0,2

Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

17. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	1	2	3	4
P	0,25	0,25	0,25	0,25

Пусть $Y_i = \begin{cases} 1, \text{ если } X = i \text{ или } X = 4, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$

Верно ли, что а) Y_1 и Y_2 независимы? б) Y_1 и Y_3 независимы? в) Y_2 и Y_3 независимы? г) Y_1, Y_2, Y_3 независимы?

§ 2.3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, множество возможных значений которой конечно, называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Если множество возможных значений счетное, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части сходится абсолютно.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами.

Свойство 1°. Математическое ожидание константы равно этой константе:

$$M(C) = C.$$

Свойство 2°. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X).$$

Свойство 3°. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Свойство 4°. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n).$$

Кроме перечисленных свойств, часто используется и такое свойство: если $\varphi(x)$ – функция и X – дискретная случайная величина, то

$$M(\varphi(x)) = \varphi(x_1)p_1 + \varphi(x_2)p_2 + \ldots .$$

Примеры

1. Прибыль от торговли прохладительными напитками в жаркий день составляет 80, в дождливый день – 10, а в другие дни – 30. Найти математическое ожидание прибыли, если вероятность жаркого дня равна 0,3, дождливого – 0,2.

Р е ш е н и е . Пусть Y – прибыль. Составим закон распределения Y, учитывая, что $P(Y = 30) = 1 - (0{,}3 + 0{,}2) = 0{,}5$.

Y	10	30	80
P	0,2	0,5	0,3

Имеем $M(Y) = 10 \cdot 0{,}2 + 30 \cdot 0{,}5 + 80 \cdot 0{,}3 = 2 + 15 + 24 = 41$.

2. Пусть r – ежедневные расходы на рекламу в некоторой фирме и X_r – число продаж, совершаемых в течение дня при расходах на рекламу, равных r. При $r = 5$ закон распределения X_r таков:

X_5	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1

Если $r = 15$, то закон распределения другой:

X_{15}	0	1	2	3	4	5
P	0	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Ежедневная прибыль рассчитывается по формуле $Y_r = 10 \cdot X_r - r$. При каждом r (5 или 15) математическое ожидание прибыли больше?

Р е ш е н и е . Находим $M(X_5) = 1{,}8$; $M(X_{15}) = 3{,}2$. Используя свойства математического ожидания, получим:

$$M(Y_5) = M(10 \cdot X_5 - 5) = 10 \cdot 1{,}8 - 5 = 13,$$

$$M(Y_{15}) = M(10 \cdot X_{15} - 5) = 10 \cdot 3{,}2 - 15 = 17.$$

Следовательно, при $r = 15$ математическое ожидание прибыли выше.

3. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная распределением

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Доказать, что для любой выпуклой функции $\varphi(x)$ выполняется неравенство

$$M(\varphi(x)) \geq \varphi(M(x)).$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi(x)$ имеем

$$M(\varphi(x)) = \varphi(x_1)p_1 + \varphi(x_2)p_2 \quad \text{и} \quad \varphi(M(x)) = \varphi(x_1p_1 + x_2p_2).$$

Так как $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$, то по определению выпуклой функции имеем $\varphi(x_1p_1 + x_2p_2) \leq \varphi(x_1)p_1 + \varphi(x_2)p_2$, что и требовалось доказать.

Из неравенства Йенсена легко получить неравенство $M(\varphi(x)) \geq \varphi(M(x))$ для дискретной случайной величины X с конечным множеством возможных значений. В действительности это неравенство справедливо и для произвольной случайной величины X.

4. Пусть цена p является случайной величиной и $M(p) = 20$. Пусть зависимость спроса от цены задается уравнением $D = \dfrac{100}{p}$. Доказать неравенство $M(D) \geq 5$.

Доказательство. Имеем $D_p'' = \left(-100p^{-2}\right)' = 200p^{-3} \geq 0$. Поэтому функция спроса $D(p)$ является выпуклой, и мы можем применить доказанное неравенство. Имеем $M(D) \geq 100/M(p) = 5$.

5. Пусть $S = -100 + 20p$, $D = A - Bp$ – уравнения, определяющие предложение и спрос в зависимости от цены p. Коэффициенты A и B являются независимыми дискретными случайными величинами, заданными распределениями:

A	200	240

B	10	20

P	0,5	0,5		P	0,6	0,4

Пусть p_e – равновесная цена, зависящая от случайных коэффициентов A и B, $Q_e = S = D$ – равновесное количество проданного товара, также зависящее от A и B. Найти математические ожидания p_e и Q_e.

Решение. Из уравнения $S = D$ находим $p_e = \dfrac{A+100}{B+20}$. Так как A и B независимы, то независимы любые функции от них. В частности, независимы случайные величины $A + 100$ и $(B + 20)^{-1}$. Следовательно, $M(p_e) = M(A + 100) \cdot M((B + 20)^{-1})$. Имеем

$$M(A) = 200 \cdot 0{,}5 + 240 \cdot 0{,}5 = 220 \text{ и } M(A + 100) = 320.$$

$$M((B + 20)^{-1}) = (10 + 20)^{-1} \cdot 0{,}6 + (20 + 20)^{-1} \cdot 0{,}4 = 0{,}03.$$

Отсюда $M(p_e) = 320 \cdot 0{,}03 = 9{,}6$.

Теперь найдем $M(Q_e)$. Для этого воспользуемся равенством

$$Q_e = S(p_e) = -100 + 20 \cdot p_e.$$

Получим

$$M(Q_e) = M(-100 + 20p_e) = -100 + 20M(p_e) = 92.$$

6. Пусть a – величина постоянного дохода, $U(a)$ – его функция полезности. Предположим, что случайный доход имеет вид $X_r = a + rX$, где $r \geq 0$ – интенсивность случайных факторов, X – величина случайного отклонения дохода.

Предположим также, что случайные факторы не оказывают завышающего или занижающего влияния на величину дохода в среднем. Другими словами, считаем, что $M(X) = 0$. Наконец, считаем, что с ростом дохода предельная полезность денег уменьшается и, следовательно, функция $U(a)$ строго вогнута (т.е. $U''(a) < 0$). Из сделанных предположений вытекает убывание математического ожидания полезности случайного дохода $M(U(X_r))$ при увеличении интенсивности r случайных факторов, что объясняет отрицательное отношение к риску.

Доказательство. Докажем убывание $M(U(X_r))$ для величины случайного отклонения дохода X с конечным числом возможных значений. Всякую вогнутую функцию $U(x)$ можно представить в виде $U(x) = W(x) + k(x - a)$, где $W(x)$ – вогнутая функция, для которой $x = a$ является максимумом; k – подходящая константа. В случае дифференцируемой функции $U(x)$ достаточно положить $k = U'(a)$, $W(x) = U(x) - k(x - a)$. Действительно, $W(x)$ вогнута, так как является разностью вогнутой функции и линейной функции и, кроме того, $W'(a) = U'(a) - k = 0$.

Применим указанное разложение функции $U(x)$ для оценки математического ожидания $M(U(x_r))$. Имеем

$$M(U(x_r)) = M(W(X_r)) + krM(X) = M(W(X_r)).$$

Пусть распределение X имеет вид:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда распределение X_r имеет вид:

X_r	$a + rx_1$	$a + rx_2$	…	$a + rx_n$
P	p_1	p_2	…	p_n

Отсюда

$$M(W(X_r)) = W(a + rx_1)p_1 + W(a + rx_2)p_2 + \ldots + W(a + rx_n)p_n.$$

Так как a – точка максимума и $W(x)$ – строго вогнутая функция, то каждое слагаемое $W(a + rx_i)p_i$ убывает с ростом r, если только $x_i \neq 0$. Если $x_i = 0$, то $W(a + rx_i)p_i = W(a)p_i$ не зависит от r. Итак, каждое слагаемое либо убывает, либо не меняется, следовательно, $M(W(X_r))$ убывает с ростом r.

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины.
3 Может ли математическое ожидание дискретной случайной величины, принимающей целые значения, быть числом дробным (нецелым)?
3 Может ли дискретная случайная величина не иметь математического ожидания?
3 Докажите теорему сложения математических ожиданий.
3 Пусть X, Y, Z – независимые случайные величины. Верно ли, что $M[(X+Y)(Y+Z)] = M(X+Z)M(Y+Z)$?

Упражнения

18. Пусть r – расходы фирмы на рекламу, X_r – ее доход, а $Y_r = X_r - r$ – прибыль при расходах на рекламу r. Дискретная случайная величина X_r задана распределением

X_r	2	4
P	$1/(r+1)$	$r/(r+1)$

а) Доказать, что $M(X_r)$ – монотонно возрастающая функция.
б) При каком значении r математическое ожидание прибыли максимально?

19. В лотерее на 1000 билетов разыгрывается два выигрыша по 100 и 200. Найти математическое ожидание выигрыша: а) по одному билету; б) по двум билетам.

20. Дискретные случайные величины X_1, X_2, X_3 независимы, положительны и одинаково распределены. Найти $M\left(\dfrac{X_1}{X_1+X_2+X_3}\right)$.

21. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти: а) $M(X)$; б) $M(X^2)$.

22. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3

Найти вероятность события $|X - M(X)| \le 1{,}5$.

23. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	1	2	3	4	5	6	30
P	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1

Найти вероятность события $X > M(X)$.

24. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	1	2	3	4	5
P	p_1	p_2	p_3	p_2	p_1

Доказать, что: а) $M(2^X) \ge 8$; б) $M(\log_3 X) \le 1$.

25. Дискретные случайные величины X, Y независимы и имеют распределения

X	–1	1
P	0,5	0,5

Y	–1	0	1
P	0,3	0,3	0,4

Найти: а) $M(X + 2Y + 3XY)$; б) $M((X+Y)^2)$; в) $M(2^{X+Y})$.

26. Дискретные случайные величины X, Y, Z независимы и имеют одинаковое распределение

X, Y, Z	0	2
p	0,5	0,5

Найти: а) $M((X + Y) \cdot (Y + Z))$; б) $M((X + Y) / (Z - 1))$.

§ 2.4. Дисперсия дискретной случайной величины

Для любой случайной величины X разность $X - M(X)$ называется *отклонением* X. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X называется *дисперсией* X. По определению, дисперсия

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Так как квадрат отклонения – это неотрицательная величина, то и дисперсия также неотрицательна. *Стандартное отклонение* случайной величины X определяется как корень квадратный из дисперсии и обозначается $\sigma(X)$. Из свойств математического ожидания вытекает, что

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами.

Свойство 1°. Прибавление (вычитание) константы к случайной величине не меняет ее дисперсии

$$D(X + C) = D(X).$$

Свойство 2°. Постоянный множитель выносится из под знака дисперсии в квадрате

$$D(CX) = C^2D(X).$$

Свойство 3°. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых.

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

Полезно также помнить, что дисперсия константы равна нулю: $D(C) = 0$.

Примеры

1. Пусть $U(a)$ – полезность постоянного дохода a, X – случайный доход. Найдем математическое ожидание $M(U(X))$, разлагая функцию $U(x)$ в точке a по формуле Тейлора до членов второго порядка:

$$U(x) \approx U(a) + U'(a)(x-a) + \frac{1}{2}U''(a)(x-a)^2.$$

Заметим, что в случае квадратичной функции полезности данное равенство является точным при любом x. Для других нелинейных функций $U(x)$ ошибка является бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x - a)^2$ при $x \to a$. Имеем:

$$M(U(X)) \approx M\left(U(a) + U'(a)(X-a) + \frac{1}{2}U''(a)(X-a)^2\right) =$$

$$= U(a) + U'(a)M(X-a) + \frac{1}{2}U''(a)M\left((X-a)^2\right).$$

В точке $a = M(X)$ имеем $M(X - a) = 0$ и $M((X - a)^2) = D(X)$. Поэтому

$$M(U(X)) \approx U(a) + \frac{1}{2}U''(a) \cdot D(X).$$

Принято считать, что при увеличении дохода полезность каждого дополнительного рубля уменьшается. Другими словами, функция $U(X)$ строго вогнута и $U''(x) < 0$. Таким образом, дисперсия вносит линейный отрицательный вклад в величину математического ожидания полезности случайного дохода X.

2. Найти дисперсию и стандартное отклонение дискретной случайной величины X, заданной распределением

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

используя формулу $D(X) = M(X^2) - M(X)^2$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$M(X) = -5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = -0,3.$$

Составим закон распределения X^2:

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

$$M(X^2) = 25 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,2 = 15,3.$$

Отсюда $D(X) = 15,3 - (-0,3)^2 = 15,21$ и $\sigma(X) = \sqrt{15,21} = 3,9$.

3. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3 \cdot X + 2 \cdot Y$, если $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$.

Р е ш е н и е. Так как случайные величины X и Y независимы, то независимы и $3X$ и $2Y$. Используя свойства дисперсии, получим

$$D(Z) = D(3X) + D(2Y) = 9D(X) + 4D(Y) = 69.$$

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Как определяется и что характеризует дисперсия случайной величины? Как находится дисперсия?

3 Может ли выполняться неравенство $M(X^2) < \{M(X)\}^2$?

Упражнения

27. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,6. Найти распределение X, если известно, что $M(X) = 1,4$ и $D(X) = 0,24$.

28. Дискретная случайная величина X имеет только два равновероятных возможных значения x_1 и x_2. Доказать, что $D(X) = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2$.

29. Случайные величины X и Y независимы и $M(X) = M(Y) = 1$, $D(X) = 2$, $D(Y) = 3$. Найти $D(X \cdot Y)$.

30. Игральная кость подбрасывается один раз. Пусть X – число, выпавшее на игральной кости. Найти: а) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; б) вероятность события $|X - M(X)| \le \sigma(X)$.

31. Дискретные случайные величины X, Y, Z независимы и принимают с равной вероятностью значения 1 или 3. Для случайной величины $V = X \cdot Y \cdot Z$ найти $M(V)$ и $D(V)$.

32. Для случайной величины X математическое ожидание $M(X) = 1$, дисперсия $D(X) = 2$. Найти $M(Y)$ и $D(Y)$ для случайной величины $Y = 3X - 4$.

33. Случайные величины X, Y независимы и $M(X) = 1$, $D(X) = 2$, $M(Y) = 3$, $D(Y) = 4$. Для случайной величины $Z = 6X - 5Y$ найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

34. Случайные величины X, Y, Z независимы и $M(X) = M(Y) = = M(Z) = 1$, $D(X) = 1$, $D(Y) = 2$, $D(Z) = 3$. Для случайной величины $V = 4X + 2Y - Z + 2$ найти $M(V)$ и $D(V)$.

35. Дискретные случайные величины X_1, X_2 независимы и имеют одинаковое распределение

X_i	1	2	3	4
P	0,25	0,25	0,25	0,25

Для случайной величины $X = X_1 + X_2$ найти: а) $M(X)$ и $D(X)$; б) вероятность события $|X - M(X)| \ge 3\sigma X)$.

36. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ независимы и имеют одинаковое распределение

X_i	1	2	3
P	1/3	1/3	1/3

Для случайной величины $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$ найти вероятность события $|X - M(X)| \geq 3\sigma(X)$.

§ 2.5. Числовые характеристики основных дискретных законов распределения

Биномиальным распределением с параметрами n и p называется распределение числа успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха в каждом испытании p. Биномиальное распределение имеет вид

X	0	1	2	…	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^n p^n q^0$

,

где $q = 1 - p$. Для случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p, имеем:

$$M(X) = np,\ D(X) = npq.$$

Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$ задается следующей бесконечной таблицей:

X	0	1	2	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	…

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равны параметру λ данного распределения.

Геометрическим распределением с параметром p называется распределение числа испытаний до первого успеха в серии независимых испытаний с вероятностью успеха в каждом испытании. Геометрическое распределение имеет вид бесконечной таблицы

X	1	2	3	…	k	…
P	p	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

Для дискретной случайной величины X, распределенной по геометрическому закону, $M(X) = \dfrac{1}{p}$, $D(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

Примеры

1. Банк выдал n независимым заемщикам ссуды в размере K руб. каждому заемщику. Найти математическое ожидание и дисперсию прибыли банка, если с вероятностью p заемщик возвращает $(1 + r)K$ и не возвращает ничего с вероятностью $q = 1 - p$.

Решение. Пусть X – число заемщиков, возвративших долг, Y – прибыль банка. Тогда количество возвращенных денег составит $(1 + r)KX$ руб. при суммарной величине ссуды nK. Следовательно, прибыль дается формулой

$$П = (1 + r)KX - nK.$$

Находим математическое ожидание прибыли:

$$M(П) = (1 + r)KM(X) - nK = (1 + r)Knp - nK =$$
$$= nK((1 + r)p - 1) = nK(rp - q).$$

Здесь мы использовали свойства математического ожидания и равенство $M(X) = np$, вытекающего из биномиальности распределения X.

Так как выдача ссуд имеет смысл только при положительном математическом ожидании прибыли, то получаем $rp - q > 0$, откуда вытекает условие на ставку ссудного процента

$$r > \frac{q}{p}.$$

Находим дисперсию прибыли банка:

$$D(\Pi) = D((1 + r)KX - nK) = (1 + r)^2K^2npq.$$

2. Страховая компания заключила 1000 независимых договоров на следующих условиях: страховой взнос составляет K руб., страховка равна $100K$ руб. Вероятность наступления страхового события по каждому договору равна 0,002. Найти приближенно вероятность того, что прибыль страховой компании будет больше половины своего математического ожидания.

Решение. Пусть Π – прибыль, X – количество выплаченных страховок. Тогда $\Pi = 1000K - 100KX$. Пусть $p = 0{,}002$ – вероятность выплаты страховки по одному договору (вероятность успеха в одном испытании), $n = 1000$ – число заключенных договоров (число независимых испытаний). Тогда

$$M(X) = np = 2,\ \ M(\Pi) = 1000K - 100KM(X) = 800K.$$

Условие $\Pi > \frac{1}{2}M(\Pi)$ эквивалентно следующим условиям:

$$1000K - 100KX > 400K \Leftrightarrow 100KX < 600K \Leftrightarrow X < 6.$$

Поэтому искомая вероятность равна сумме

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5).$$

Так как вероятность p мала, а $np = 2 < 10$, то, применяя приближенную формулу Пуассона, получим $P(X = m) \approx \frac{2^m}{m!}e^{-2}$. Отсюда

$$P(\Pi > M(\Pi)) \approx e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}\right) =$$

$$= e^{-2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15}\right) \approx 0{,}983.$$

3. В некоторой лотерее на 100 билетов в каждом выпуске разыгрываются три различных выигрыша. Участник лотереи решил покупать по одному билету в каждом выпуске до тех пор, пока он не выиграет все три выигрыша. Найти математическое ожидание числа купленных билетов.

Решение. Пусть X_1 – число билетов, купленных до первого выигрыша; X_2 – число билетов, купленных после первого выигрыша и до второго; X_3 – число билетов, купленных после второго выигрыша. Тогда $X = X_1 + X_2 + X_3$ – общее число билетов, купленных до получения выигрышей всех видов.

Так как тиражи различных выпусков – независимые испытания, то случайная величина X_1 распределена по геометрическому закону с параметром $p = 0{,}03$. Следовательно, $M(X_1) = 0{,}03^{-1}$.

После получения первого выигрыша количество выигрышей уменьшается до двух, поэтому случайная величина X_2 распределена по геометрическому закону с параметром $p = 0{,}02$. Следовательно, $M(X_2) = 0{,}02^{-1}$. Аналогично, $M(X_3) = 0{,}01^{-1}$.

Тогда математическое ожидание числа купленных билетов будет

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 183\frac{1}{3}.$$

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Какой закон распределения называется биномиальным? Почему?

3 Какой закон распределения называется законом Пуассона? Увяжите с приближенной формулой Пуассона.

Упражнения

37. Случайная составляющая выручки равна $2X$, где X – случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами $n = 100$ и $p = 0{,}5$. Случайная составляющая затрат имеет вид $50Y$, где Y – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Найти дисперсию прибыли.

38. Две монеты подбрасываются до тех пор, пока не выпадут два герба. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бросков.

39. Две игральные кости бросаются до тех пор, пока сумма выпавших чисел не станет более 10. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бросков.

40. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадут все цифры. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бросков.

41. Четыре монеты подбрасываются 100 раз. Пусть X – число бросков, в которых выпали 1 герб и 3 цифры. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

42. В серии независимых испытаний, которые проводятся с частотой одно испытание в одну минуту, вероятность наступления события A равна 1/9 (в одном испытании). Найти стандартное отклонение случайной величины X – времени ожидания двукратного наступления события A.

43. Пусть X – случайная величина, заданная биномиальным распределением с параметрами n и p =0,5; $P(n)$ – вероятность события $X \geq M(X) + 3\sigma(X)$. Найти: а) $P(9)$; б) $P(1000)$ приближенно.

44. Пусть X – случайная величина, распределенная по геометрическому закону с параметром p = 0,5. Найти вероятность события $X \geq M(X) + 3\sigma(X)$.

45. Пусть X – число успехов в серии n независимых испытаний с вероятностью p успеха в каждом испытании; $Y = X - np$ – отклонение X. Найти $M(Y^3)$, используя формулу

$$M((X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^3) = M(X_1^3) + M(X_2^3) + \ldots + M(X_n^3)$$

для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с нулевыми математическими ожиданиями.

46. Пусть X – число успехов в серии n повторных независимых испытаний с вероятностью успеха в каждом испытании p. Используя решение предыдущей задачи, найти $M(X^3)$.

§ 2.6. Ковариация и коэффициент корреляции

Ковариацией (*корреляционным моментом*) $\mathrm{Cov}(X, Y)$ случайных величин X, Y называется математическое ожидание произведения отклонений X и Y

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Ковариация обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$.

2. $\mathrm{Cov}(X, X) = D(X)$.

3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. Если X и Y независимы, то $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

5. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.

6. $\mathrm{Cov}(aX , Y) = \mathrm{Cov}(X, aY) = a\mathrm{Cov}(X, Y)$.

7. $\mathrm{Cov}(X +Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$.

8. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$.

Если $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными*. Таким образом, из независимости X и Y следует их некоррелированность. Обратное утверждение неверно.

Ковариация $\mathrm{Cov}(X, Y)$ может использоваться как характеристика взаимосвязи X и Y. Например, положительный знак $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$ свидетельствует о том, что в колебательной динамике случайных величин X и Y преобладают отклонения от средних значений в одном направлении. Для подобного сравнения случайных величин, однако, больше подходит безразмерная характеристика – *коэффициент корреляции*, определяемый формулой

$$\rho_{XY} = \rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. $\rho_{XY} = \rho_{YX}$.

2. $|\rho_{XY}| \le 1$.

3. Условие $|\rho_{XY}| = 1$ равнозначно существованию констант $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, таких, что равенство $Y = \alpha + \beta X$ выполняется с вероятностью 1.

Для набора случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ковариационной матрицей* $C = (c_{ij})$ и *корреляционной матрицей* $\Re = (\rho_{ij})$ называют квадратные матрицы порядка n, составленные из всех парных ковариаций $c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ и всех коэффициентов корреляции $\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Пусть C – ковариационная матрица случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $A = (a_1, a_2, ..., a_n)^T$ – произвольный ненулевой вектор констант. Тогда для случайной величины $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ ... + a_n X_n$ выполняется соотношение

$$D(Y) = A^T C A \ge 0,$$

при этом условие $D(Y) = 0$ равносильно равенству $CA = 0$, означающему вырожденность матрицы C.

Ковариационная и корреляционная матрицы всегда симметричны и неотрицательно определены, поэтому их определители неотрицательны:

$$\det A \ge 0, \qquad \det \Re \ge 0.$$

Определитель корреляционной матрицы удовлетворяет также дополнительному ограничению: $\det \Re \le 1$.

Примеры

1. Для случайных величин X и Y, таких, что $\mathrm{Cov}(X, Y) = 5$, $D(X) = 7$, $D(Y) = 11$, показать, что $X - 3Y$, не может быть константой.

Решение. Находим дисперсию

$$D(X - 3Y) = D(X) + 9D(Y) - 6\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 7 + 99 - 30 = 76.$$

Поскольку $D(X - 3Y) > 0$, $X - 3Y$ не может быть константой.

2. Случайные величины X, Y независимы и $D(X) = D(Y) = 1$. Для случайных величин $U = 3X + Y$, $V = 3X - Y$ найти коэффициент корреляции ρ_{UV}.

Решение. Последовательно находим

$$\sigma_U = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \quad \sigma_V = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10},$$

$$\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{Cov}(3X, 3X) + \mathrm{Cov}(3X, -Y) + \mathrm{Cov}(Y, 3X) +$$
$$+ \mathrm{Cov}(Y, -Y) = 9D(X) - D(Y) = 8,$$

$$\rho_{UV} = \frac{\mathrm{Cov}(U, V)}{\sigma_U \sigma_V} = 0{,}8.$$

3. Показать, что в случае, когда ковариационная матрица доходностей ценных бумаг невырождена, из данных бумаг невозможно составить безрисковый портфель.

Решение. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ – случайные доходности ценных бумаг n видов, C – их ковариационная матрица. Пусть x_i – доля первоначальных средств, инвестированная в ценные бумаги вида i, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – соответствующий вектор-портфель, R_X – его доходность. Используя свойства ковариационной матрицы, для дисперсии доходности портфеля получаем

$$D(R_X) = X^T C X > 0,$$

поскольку ковариационная матрица невырождена по условию. Следовательно, никакой ненулевой портфель X не может быть безрисковым.

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Как определяется и что характеризует ковариация $\mathrm{Cov}(X, Y)$? Коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$?

3 Выведите формулу дисперсии суммы (зависимых) случайных величин X и Y.

3 Докажите, что $\rho(X, Y) = \pm 1$ для непостоянных случайных величин X и Y, вычисляемых по результатам опыта, в котором возможно лишь два исхода.

Упражнения

47. Случайные величины X, Y, Z независимы $\sigma_X = 3$, $\sigma_X = 3, \sigma_Y = 4, \sigma_Z = 5$. Найти ρ_{ST} – коэффициент корреляции случайных величин $S = X + Y + Z$ и $T = X - Y + Z$.

48. Независимые случайные величины X, Y, Z, U, V, W имеют дисперсию, равную 1. Найти ρ_{ST} – коэффициент корреляции случайных величин $S = 3X + 3Y + 2Z + U + V + W$ и $T = 9X + 3Y + 2Z + 2U + V + W$.

49. Для случайных величин X, Y известно, что $M(X) = 8$, $M(Y) = 6$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 7$. Найти $M(XY)$.

50. Для случайных величин X, Y известно, что $M(X) = 2$, $M(Y) = 3$, $D(X) = 8$, $D(Y) = 32$, ρ_{XY} =0,25. Найти $M(XY)$.

51. Для случайных величин X, Y известно, что $\mathrm{Cov}(X, Y) = 3$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$. Найти $D(X - Y)$.

52. Случайные величины X, Y принимают только значения 0 и 1. Найти дисперсию $D(X - Y)$, если $P(X = 1) = P(Y = 1) = 0{,}1$ и $\rho_{XY} = 0{,}2$.

53. Дано: $M(X) = M(Y) = 8$, $D(X) = D(Y) = 80$, $\rho_{XY} = 0{,}1$. Найти математическое ожидание $M[(X + Y)^2]$.

54. Случайные величины X, Y распределены по геометрическому закону. Найти дисперсию $D(X - Y)$, если $M(X) = M(Y) = 2$, а $\rho_{XY} = 0{,}7$.

55. Случайные величины X, Y распределены по закону Пуассона. Найти дисперсию $D(3X + 5Y)$, если $M(X) = M(Y) = 4$, а $\rho_{XY} = 0{,}8$.

56. Пусть X, Y – независимые случайные величины, причем $M(Y) = 0$. а) Верно ли, что $\mathrm{Cov}(X, XY) = 0$? б) Верно ли, что X и XY независимы?

57. Дисперсии независимых случайных величин U, V равны 1. Для случайных величин $X = U + V$, $Y = 7U + V$, $Z = 7U - V$ найти: а) корреляционную матрицу; б) определитель корреляционной матрицы.

58. Пусть X, Y, Z – независимые одинаково распределенные случайные величины, $U = XY$, $V = YZ$. Найти ρ_{UV}, если $M(X) = D(X) = 2$.

59. Пусть X, Y, Z – произвольные случайные величины с ненулевыми дисперсиями. Доказать неравенство

$$\arccos\rho_{XZ} \le \arccos\rho_{XY} + \arccos\rho_{YZ}.$$

60. Пусть X, Y, Z, U – такие случайные величины, что $\rho_{XY} = \rho_{YZ} = \rho_{ZU} > \sqrt{3}/2$. Доказать, что $\rho_{XU} > 0$.

61. Доказать, что случайная величина $X + U$ не может быть константой, если $\rho_{XY} = \rho_{YZ} = \rho_{ZU} > 0{,}5$.

62. Пусть R_1, R_2 – доходности ценных бумаг двух видов, $\rho = \rho(R_1, R_2)$, $m_i = M(R_i)$, $\sigma_i = \sigma(R_i)$, $i = 1, 2$. Пусть X – портфель, составленный из бумаг данного вида. Найти математическое ожидание доходности портфеля X с наименьшей дисперсией доходности, если $m_1 = 7\%$, $\sigma_1 = 1\%$, $m_2 = 14\%$, $\sigma_2 = 2\%$, $\rho = -0{,}5$.

63. Пусть R_1, R_2 , R_3 – доходности ценных бумаг трех видов, C – их ковариационная матрица, $m_i = M(R_i)$, $i = 1, 2, 3$. Найти доходность безрисковых ценных бумаг, если $m_1 = 6\%$, $m_2 = 9\%$, $m_3 = 15\%$, а $C = 10^{-4}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 10 \\ -5 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 40 \end{pmatrix}$ – вырожденная матрица.

64. Среднее арифметическое парных ковариаций доходностей ценных бумаг n видов, образующих некоторый портфель X, равно $\overline{c}$, а среднее их дисперсий равно $\overline{\sigma}^2$. Найти дисперсию доходности *однородного* портфеля X, т.е. портфеля, в котором инвестиции в различные виды ценных бумаг распределены поровну.

65. В некоторой лотерее на N билетов разыгрывается несколько выигрышей. Пусть d – дисперсия размера выигрыша по одному билету. Доказать, что дисперсия суммарного выигрыша по n билетам равна $\dfrac{nd(N-n)}{N-1}$.

§ 2.7. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

Случайная величина X называется *непрерывной*, если непрерывна ее функция распределения $F(x)$. Для непрерывной случайной величины X вероятность любого ее возможного значения равна 0.

Свойства функции распределения

Свойство 1°. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Свойство 2°. Функция распределения есть неубывающая функция:

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Свойство 3°. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в промежуток $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ или (a, b) не зависит от вида промежутка и равна $F(b) - F(a)$:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Свойство 4°. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Случайная величина X называется *абсолютно непрерывной*, если найдется неотрицательная функция $f(x)$, называемая *плотностью распределения*, такая, что для $a < b$ вероятность попадания X в отрезок $[a, b]$ получается путем интегрирования данной функции:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Свойства функции плотности

Свойство 1°. Функция плотности неотрицательна:

$$f(x) \ge 0.$$

Свойство 2°. Вероятность того, что абсолютно непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее отрезку $[a, b]$, определяется равенством:

$$P\left(a \le X \le b\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 3°. Функция плотности обладает свойством нормированности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Свойство 4°. $f(x) = F'(x)$ в точке непрерывности $f(x)$.

Абсолютно непрерывная случайная величина X называется сосредоточенной на промежутке $[a, b]$, если вероятность попадания X в данный промежуток равна 1.

Свойство 3° может быть сформулировано в этом случае следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Функцию распределения $F(x)$ абсолютно непрерывной случайной величины, сосредоточенной на отрезке $[a, b]$, можно представить в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \int_a^x f(t)dt, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины X с функцией плотности $f(x)$ определяется равенством:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

если несобственный интеграл сходится абсолютно.

Если случайная величина X сосредоточена на интервале (a, b), то

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины X с функцией плотности $f(x)$ определяется равенством:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx, \text{ или}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M(X)^2.$$

Если случайная величина X сосредоточена на интервале (a, b), то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx, \text{ или}$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M(X)^2.$$

Среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины X определяется так же, как и для дискретной случайной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Для математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины X сохраняются свойства числовых характеристик дискретной случайной величины.

Случайная величина X, сосредоточенная на интервале (a, b), *распределена равномерно*, если на этом интервале плотность вероятности сохраняет постоянное значение:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Для равномерно распределенной случайной величины

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Случайная величина X называется *распределенной нормально*, если ее функция плотности имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

при этом $a = M(X)$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$, $\sigma \ge 0$.

Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал (α, β) равна

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

В частности, вероятность заданного отклонения от математического ожидания дается формулой:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Случайная величина X, сосредоточенная на положительной полуоси $[0; \infty)$, распределена по *показательному закону*, если на этом интервале функция плотности имеет вид:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, \text{ где } \lambda > 0.$$

Вероятность попадания в интервал (a, b), a, $b > 0$ непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, вычисляется по формуле:

$$P(a < X < b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение показательного распределения соответственно равны:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\ \ D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\ \ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

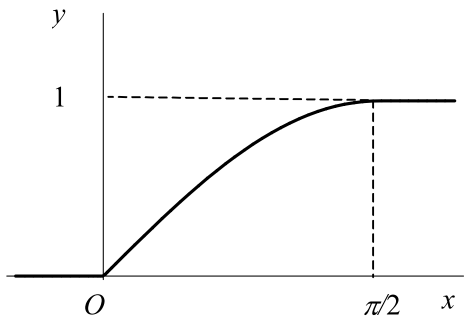
Примеры

1. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, задана функцией распределения $F(x) = \sin x$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left[\frac{\pi}{6}, 2\right]$. Построить график функции $F(x)$.

Решение. Имеем:

$$P\left(\frac{\pi}{6}\le X\le 2\right)=F(2)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-0{,}5=0{,}5.$$

График $F(x)$ выглядит следующим образом:

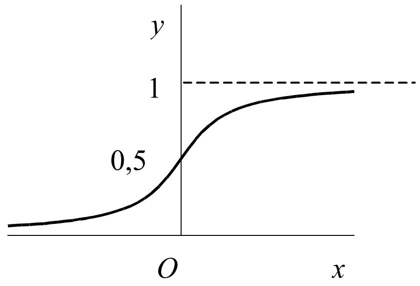


2. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{2}$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $[1, \infty)$. Построить график функции $F(x)$.

Р е ш е н и е . Имеем:

$$P(X \ge 1) = F(\infty) - F(1) = 1 - \frac{3}{4} = 0{,}25\ .$$

Построим график функции $F(x)$:

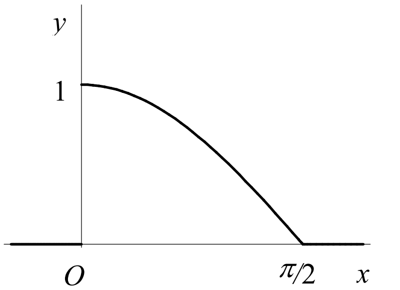


3. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, задана функцией распределения $F(x) = \sin x$. Найти функцию плотности $f(x)$. Построить график функции $f(x)$.

Р е ш е н и е . Поскольку $f(x) = F'(x)$, то имеем:

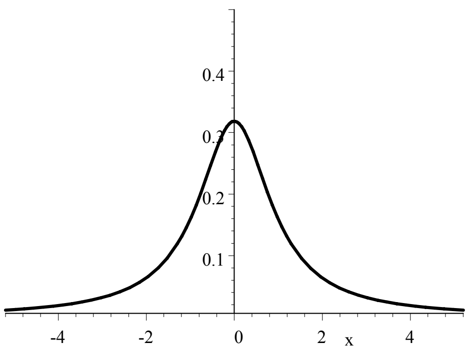
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

График функции плотности выглядит следующим образом:

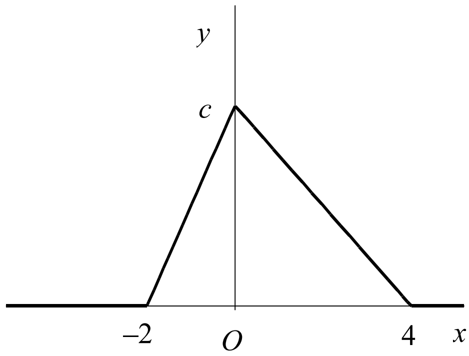


4. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$. Найти функцию плотности $f(x)$. Построить график функции $f(x)$.

Р е ш е н и е . Имеем $f(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}$. Построим график функции плотности:



5. График функции плотности $f(x)$ случайной величины X имеет следующий вид:



Определив предварительно параметр c, найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции $F(x)$.

Р е ш е н и е. Поскольку случайная величина X сосредоточена на отрезке $[-2; 4]$, то условие нормированности выглядит следующим образом:

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx = 1.$$

Интеграл слева дает площадь треугольника с основанием $b = 4 - (-2) = 6$ и высотой c, т.е.

$$\frac{1}{2}bc = 1,$$

отсюда $c = 1/3$.

Найдем аналитическое выражение функции плотности $f(x)$. На отрезке $[-2; 0]$:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{1/3} = 1, \quad 3y = 1 + \frac{x}{2}, \quad y = \frac{1}{3} + \frac{x}{6}.$$

На отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{1/3} = 1, \quad 3y = 1 - \frac{x}{4}, \quad y = \frac{1}{3} - \frac{x}{12}.$$

Таким образом, аналитическое выражение функции плотности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{3}, & -2 < x \le 0, \\ -\dfrac{x}{12} + \dfrac{1}{3}, & 0 < x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Функцию распределения будем искать по формуле:

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt,$$

поскольку $f(x) = 0$ при $x \le -2$. Ясно, что $F(x) = 0$, когда $x \le -2$. На промежутке $(-2; 0]$:

$$F(x) = \int_{-2}^{x} \left(\frac{t}{6} + \frac{1}{3}\right)dt = \left.\left(\frac{t^2}{12} + \frac{t}{3}\right)\right|_{-2}^{x} = \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}.$$

На промежутке $[0; 4]$:

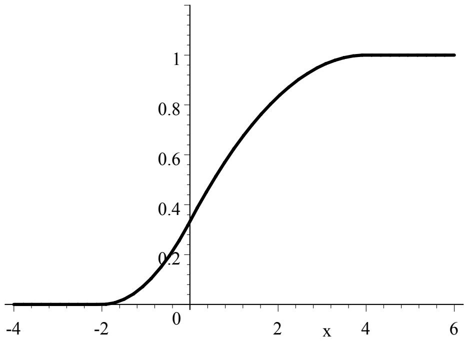
$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt = \int_{-2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = F(0) + \int_{0}^{x} \left(-\frac{t}{12} + \frac{1}{3}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3} + \left.\left(-\frac{t^2}{24} + \frac{t}{3}\right)\right|_{0}^{x} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{24} + \frac{x}{3} = -\frac{x^2}{24} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}.$$

При $x > 4$ $F(x) = 1$, по свойству функции распределения. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}, & -2 < x \le 0, \\ -\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ имеет вид:



Математическое ожидание случайной величины X найдем по формуле:

$$M(X) = \int_{-2}^{4} x f(x)dx .$$

Данный интеграл представляется в виде суммы двух интегралов:

$$M(X) = \int_{-2}^{0}\left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3}\right)dx + \int_{0}^{4}\left(-\frac{x^2}{12} + \frac{x}{3}\right)dx = = \left.\left(\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{2}\right)\right|_{-2}^{0} + \left.\left(-\frac{x^3}{36} + \frac{x^2}{6}\right)\right|_{0}^{4} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{8}{18} + \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{-64}{36} + \frac{16}{6}\right) - 0 =$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - \frac{16}{9} + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3} .$$

Дисперсию случайной величины X проще всего искать по формуле:

$$D(X) = \int_{-2}^{4} x^2 f(x)dx - M(X)^2 .$$

Первый интеграл также представляется в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-2}^{4} x^2 f(x)dx = \int_{-2}^{0}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3}\right)dx + \int\left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{3}\right)dx =$$

$$= \left.\left(\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{9}\right)\right|_{-2}^{0} + \left.\left(-\frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{9}\right)\right|_{0}^{4} =$$

$$= 0 - \left(\frac{16}{24} - \frac{8}{9}\right) + \left(-\frac{256}{48} + \frac{64}{9}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{8}{9} - \frac{16}{3} + \frac{64}{9} = -6 + 8 = 2 .$$

Таким образом, $D(X) = 2 - \frac{4}{9} = 1\frac{5}{9}$.

6. Непрерывная случайная величина *X*, сосредоточенная на отрезке [0; 4], имеет функцию плотности $f(x) = c(4 - x)$. Определив параметр *c*, найти вероятность события $A = (1 \le X \le 3)$ при условии, что произошло событие $B = (X > 2)$.

Решение. Из свойства нормированности следует, что $\int_0^4 f(x)dx = 1$, т.е.

$$\int_0^4 c(4-x)dx = 1,$$

или $c\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = c(16-8) = 8c = 1$, откуда $c = \frac{1}{8}$.

По определению условной вероятности

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

$$P(AB) = P(2 < X \le 3) = \int_2^3 f(x)dx = \frac{1}{8}\int_2^3 (4-x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{8}\left(12 - \frac{9}{2} - 8 + 2\right) = \frac{3}{16}.$$

$$P(B) = P(2 < X \le 4) = \int_2^4 f(x)dx = \frac{1}{8}\int_2^4 (4-x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 = \frac{1}{8}(16 - 8 - 8 + 2) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P_B(A) = \frac{3}{16} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

7. Непрерывная случайная величина *X*, сосредоточенная на интервале $(1; \infty)$, имеет функцию распределения $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$. Найти функцию плотности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. Найдем функцию плотности, продифференцировав функцию распределения:

$$f(x) = \frac{3}{x^4} \text{ при } x \ge 1.$$

Так как случайная величина *X* сосредоточена на полуинтервале $[1; \infty)$, то математическое ожидание находится по формуле:

$$M(X) = \int_1^\infty xf(x)dx = \int_1^\infty \frac{3}{x^3}dx = -\frac{3}{2x^2}\Bigg|_1^\infty = \frac{3}{2}.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

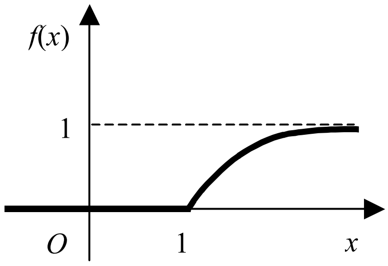
$$D(X) = \int_1^\infty x^2 f(x)dx - M(X)^2.$$

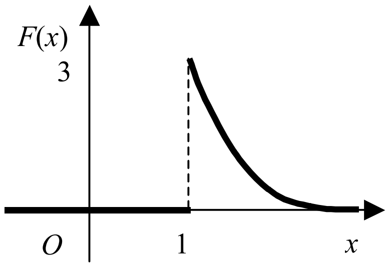
Вычислим отдельно первый интеграл:

$$\int_1^{\infty} x^2 \frac{3}{x^4} dx = \int_1^{\infty} \frac{3}{x^2} dx = -\frac{3}{x}\Big|_1^{\infty} = 3.$$

Поэтому $D(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ представлены ниже.





С показательным распределением связаны многие задачи массового обслуживания. Рассмотрим такой пример.

8. Пусть известно, что поток клиентов в банк имеет среднюю частоту $\lambda = 10$ клиентов/час. Обслуживание клиентов ведется персоналом банка со средней скоростью $\mu = 4$ клиента/час. Сколько операционистов требуется привлечь, чтобы вероятность отказа в обслуживании из-за занятости обслуживающего персонала не превышала 0,05?

Р е ш е н и е . Обычное предположение состоит в том, что интервалы времени между приходами очередных клиентов распределены по показательному закону с плотностью

$$f(t) = 10e^{-10t},\ t \geq 0.$$

Будем считать, что в случае, когда все операционисты заняты, очередной клиент не ждет, а сразу уходит. В теории массового обслуживания доказываются следующие формулы (формулы Эрланга).

Обозначим через $\rho = \lambda/\mu = 2{,}5$ – среднее число клиентов, приходящих за среднее время обслуживания одного клиента. Тогда вероятность P_0 того, что клиентов нет:

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},$$

где n – число операционистов в банке.

Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Вычислим $P_{\text{отк}}$ для $n = 3$. Имеем:

$$P_0 = \left(1 + 2{,}5 + \frac{2{,}5^2}{2!} + \frac{2{,}5^3}{3!}\right)^{-1} = 0{,}11,$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{2{,}5^3}{3!} P_0 = 0{,}28.$$

Как мы видим, ситуация не такая простая, как нам представлялась вначале!

$$n = 4;\ P_0 = 0{,}09;\ P_{\text{отк}} = 0{,}15;$$

$$n = 5;\ P_0 = 0{,}08;\ P_{\text{отк}} = 0{,}07$$

и, наконец, при $n = 6$, $P_0 = 0{,}083$ и $P_{\text{отк}} = 0{,}03 < 0{,}05$.

Таким образом, для обеспечения нужного уровня обслуживания требуется не меньше 6 операционистов.

9. Магазин производит закупку мужской обуви. Как необходимо заказать распределение обуви по размерам, если из антропометрической статистики известно, что данное распределение является нормальным с математическим ожиданием $a = M(X) = 42$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = \sigma(X) = 2$?

Решение. Для того чтобы определить процент потребителей с данным размером обуви, достаточно применить формулу:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Например, как рассчитать процент покупателей на размер 41? Будем считать, что X удовлетворяет неравенству:

$$40{,}5 \le X \le 41{,}5.$$

Тогда

$$P(40{,}5 \le X \le 41{,}5) = \Phi\left(\frac{41{,}5 - 42}{2}\right) - \Phi\left(\frac{40{,}5 - 42}{2}\right) =$$

$$= \Phi(-0{,}25) - \Phi(-0{,}75) = \Phi(0{,}75) - \Phi(0{,}25).$$

Мы использовали нечетность функции Лапласа: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. По таблице значений функции Лапласа находим: $\Phi(0{,}75) = 0{,}2734$, $\Phi(0{,}25) = 0{,}0987$. Таким образом, искомая вероятность:

$$P(40{,}5 \le X \le 41{,}5) = 0{,}1747,$$

поэтому 17,5% всего объема закупаемой обуви должна составлять обувь размера 41. Аналогично можно найти доли, приходящиеся на другие размеры.

10. В нормально распределенной совокупности 20% значений случайной величины X составляют значения, меньшие чем 3,3 и 30% значений X составляют значения, большие 6,7. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X.

Решение. По условию $P(X \le 3{,}3) = 0{,}2$ и $P(X > 6{,}7) = 0{,}3$. Если a и σ – искомые математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормальной случайной величины X, то имеем:

$$P(X \le 3{,}3) = \Phi\left(\frac{3{,}3 - a}{\sigma}\right) + 0{,}5, \quad P(X > 0{,}5) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{6{,}7 - a}{\sigma}\right),$$

поэтому

$$0{,}2 = \Phi\left(\frac{3{,}3 - a}{\sigma}\right) + 0{,}5. \qquad 0{,}3 = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{6{,}7 - a}{\sigma}\right).$$

Получаем уравнения:

$$\Phi\left(\frac{a - 3{,}3}{\sigma}\right) = 0{,}3, \quad \Phi\left(\frac{6{,}7 - a}{\sigma}\right) = 0{,}2.$$

По таблице значений функции Лапласа находим:

$$\begin{cases} \dfrac{a - 3{,}3}{\sigma} = 0{,}84 \\ \dfrac{6{,}7 - a}{\sigma} = 0{,}525 \end{cases}.$$

Отсюда получим $a = 5{,}4$; $\sigma = 2{,}5$.

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Что называется функцией распределения случайной величины?

3 Какой вид имеет функция распределения дискретной случайной величины?

3 Может ли функция распределения абсолютно непрерывной случайной величины не иметь производной?

3 Может ли функция распределения быть отношением двух многочленов?

3 Как найти вероятность $P(a < X < b)$, если известна функция распределения $F_X(x)$? Рассмотрите два случая: X – непрерывная случайная величина и X – произвольная случайная величина.
3 Перечислите основные свойства функции плотности распределения.
3 Как найти функцию распределения, если известна функция плотности?

Упражнения

66. Случайная величина X, сосредоточенная на отрезке [–1; 3], задана функцией распределения $F(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал [0; 2]. Построить график функции $F(x)$.

67. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}{\pi}$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал [–3; 3]. Построить график функции $F(x)$.

68. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале [0; 3], задана функцией распределения $F(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{x}{3}$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал [0; 3/2].

69. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале [2; 6], задана функцией распределения $F(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-4x+4\right)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения: а) меньше 4; б) меньше 6; в) не меньше 3; г) не меньше 6.

70. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале [0; 2], задана функцией распределения $F(x)=\frac{1}{4}x^2$. Найти вероятность того, что в результате пяти испытаний случайная величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу [0; 1].

71. Непрерывная случайная величина X, сосредоточенная на интервале [1; 4], задана квадратичной функцией распределения $F(x) = ax^2 + bx + c$, имеющей максимум при $x = 4$. Найти параметры a, b, c и вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал [2; 3].

72. Непрерывная случайная величина X, сосредоточенная на интервале [0; 2], задана функцией распределения $F(x) = ax^3 + bx$, имеющей максимум при $x = 2$. Найти параметры a, b и вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал [1; 2].

73. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = c\operatorname{arctg}2x + d$. Найти параметры c и d и построить график функции $F(x)$.

74. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ x \in (-\infty, \infty).$$

Найти функцию плотности и построить ее график.

75. Дана функция плотности непрерывной случайной величины X, сосредоточенной на интервале [2; 4], $f(x) = ½$. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

76. Дана функция плотности непрерывной случайной величины X, сосредоточенной на положительной полуоси, $f(x) = 3e^{-3x}$. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

77. Дана функция плотности непрерывной случайной величины X, заданной на всей оси, $f(x)=\frac{2e^x}{\pi\left(1+e^{2x}\right)}$. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

78. Дана непрерывная функция плотности случайной величины X, сосредоточенной на интервале [–3; 3], $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найти параметры a, b, c и вычислить вероятность попадания случайной величины X на промежуток [0; 2].

79. Функция плотности непрерывной случайной величины X задана на всей оси, $f(x)=\frac{c}{1+x^2}$. Найти параметр c и вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал [0; 1].

80. Дана функция плотности непрерывной случайной величины X, сосредоточенной на положительной полуоси, $f(x) = 2e^{-bx}$, $b > 0$. Найти параметр b и вычислить вероятность попадания случайной величины X на промежуток $[1; \infty)$.

81. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X, сосредоточенной на интервале $[0; 3]$, $F(x) = \dfrac{x^2}{9}$. Найти функцию плотности, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности.

82. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X, сосредоточенной на интервале $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$, $F(x) = 2\sin x$. Найти функцию плотности, математическое ожидание и дисперсию.

83. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = \dfrac{e^{-|x|}}{2}$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

84. Автобусы некоторого маршрута движутся точно по расписанию с интервалом в 10 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

85. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что студент, посмотревший на часы, ошибется в определении точного времени до конца занятия не более чем на 25 с.

86. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, распределенной по равномерному закону на интервале $[4; 10]$.

87. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 4. Найти вероятность попадания этой величины в промежуток $[2; 13]$.

88. Рост призывников, направляемых на службу в армию, является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 170 см и средним квадратичным отклонением 20 см. В церемониальную роту принимаются те юноши, рост которых превышает 185 см. Сколько кандидатов в церемониальную роту может быть отобрано из 100 призывников по этому признаку?

89. Размер воротничков мужских сорочек является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 39 и средним квадратичным отклонением 3. Какой процент мужских сорочек размером 40 от общего числа следует заказать магазину?

Глава 3
Многомерные распределения

§ 3.1. Дискретные случайные векторы

Упорядоченная пара случайных величин (X, Y), называется *двумерным случайным вектором*, или *двумерной случайной величиной*.

Подмножество $B \subseteq \mathbf{R}^2$ числовой плоскости называется *борелевским*, если оно принадлежит σ – алгебре, содержащей все открытые и замкнутые множества в $\mathbf{R}^2$. Борелевскими множествами являются: точки, прямые, открытые и замкнутые многоугольники, полуплоскости, круги и т.д.

Случайные векторы $(X_1; Y_1)$, $(X_2; Y_2)$, …, $(X_n; Y_n)$ называются *независимыми*, если всякие n событий вида

$$\{(X_1; Y_1) \in B_1\},\ \{(X_2; Y_2) \in B_2\},\ \ldots,\ \{(X_n; Y_n) \in B_n\}$$

независимы в совокупности ($B_1, B_2, \ldots, B_n$ – борелевские подмножества $\mathbf{R}^2$).

Функция распределения двумерного случайного вектора (X, Y) определяется формулой:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X < x,\ Y < y).$$

Свойства функции распределения:

1. $F_{X,Y}(x, y)$ не убывает и непрерывна слева по обоим аргументам.
2. $P(x_1 \le X < x_2,\, y_1 \le Y < y_2) = F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) -- F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1)$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y), \quad \lim\limits_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$.
5. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{X,Y}(x, y) = 1$.

Случайные векторы (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) *одинаково распределены*, если их функции распределения совпадают. Для одинаково распределенных случайных векторов (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) вероятность попадания точек (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) в какое-либо борелевское множество $B \subseteq \mathbf{R}^2$ одна и та же:

$$P\{(X_1, Y_1) \in B\} = P\{(X_2, Y_2) \in B\}.$$

Пара чисел (x, y) называется *возможным значением* случайного вектора (X, Y), если для некоторого элементарного исхода $\omega \in \Omega$ имеем:

$$x = X(\omega), \;\; y = Y(\omega).$$

Случайный вектор (X, Y) называется *дискретным*, если множество всех его возможных значений конечно или счетно. Для дискретного случайного вектора (X, Y) вероятность попадания точки (X, Y) в область $G \subseteq \mathbf{R}^2$ находится по формуле:

$$P\{(X, Y) \in G\} = \sum_{(x,y) \in G} P(X = x, Y = y),$$

где суммирование производится по всем возможным значениям (x, y) случайного вектора (X, Y), принадлежащим области G.

Компоненты дискретного случайного вектора (X, Y) сами являются дискретными случайными величинами. Пусть $\{x_1, x_2, ...\}$ – множество возможных значений X, а $\{y_1, y_2, ...\}$ – множество возможных значений Y. Распределение случайного вектора (X, Y) обычно задается в виде таблицы:

	$X = x_1$	$X = x_2$	…
$Y = y_1$	p_{11}	p_{12}	…
$Y = y_1$	p_{21}	p_{22}	…
…	…	…	…

,

в которой $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, а сумма всех p_{ij} равна 1.

Законы распределения отдельных компонент случайного вектора (X, Y) выражаются через вероятности совместных значений p_{ij} по формулам:

$$P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, \quad P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}.$$

Математическое ожидание функции $\varphi(x, y)$ от компонент дискретного случайного вектора может быть представлено в виде суммы абсолютно сходящегося ряда:

$$M[\varphi(X, Y)] = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j) p_{ij}.$$

Примеры

1. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) распределена по закону

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 0$	0,11	0,12	0,13
$Y = 1$	0,2	0,21	0,23

Найти распределения X, Y и $X + Y$.

Решение. Возможные значения X: 1, 2, 3. Найдем вероятности:

$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = 0{,}11 + 0{,}2 = 0{,}31;$

$P(X = 2) = 0{,}12 + 0{,}21 = 0{,}33;$ $P(X = 3) = 0{,}13 + 0{,}23 = 0{,}36.$

Возможные значения Y: 0, 1. Найдем вероятности этих значений:

$$P(Y = 0) = 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}13 = 0{,}36; \; P(Y = 1) = 0{,}2 + 0{,}21 + 0{,}23 = 0{,}64.$$

Возможные значения $X + Y$: 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности:

$P(X + Y = 1) = P(X = 1, Y = 0) = 0{,}11;$

$P(X + Y = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) = 0{,}2 + 0{,}12 = 0{,}32;$

$P(X + Y = 3) = 0{,}13 + 0{,}21 = 0{,}34;$

$P(X + Y = 4) = 0{,}23.$

Итак, имеем распределения:

X	1	2	3
P	0,31	0,33	0,36

Y	0	1
P	0,36	0,64

$X+Y$	1	2	3	4
P	0,11	0,32	0,34	0,23

2. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана распределением:

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	0	1/3	0
$Y = 2$	0	0	1/3
$Y = 3$	1/3	0	0

Найти законы распределения частных X/Y и Y/X. Вычислить математические ожидания $M(X/Y)$ и $M(Y/X)$. Определить ковариацию Cov(X, Y) и коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$.

Решение. Найдем распределения X/Y и Y/X:

X/Y	2	3/2	1/3
P	1/3	1/3	1/3

Y/X	3	2/3	1/2
P	1/3	1/3	1/3

Отсюда $M(X/Y) = \frac{23}{18}$; $M(Y/X) = \frac{25}{18}$.

Найдем ковариацию Cov(X, Y), вычислив предварительно $M(X)$, $M(Y)$ и $M(X \cdot Y)$. Имеем $M(X) = M(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$. Найдем распределение $X \cdot Y$:

$X \cdot Y$	2	3	6
P	1/3	1/3	1/3

Отсюда $M(X \cdot Y) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$. Следовательно,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) = -\frac{1}{3}.$$

Далее, $D(X)=D(Y)=1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{3}-2^2=\frac{2}{3}$. Поэтому $\sigma(X)\cdot\sigma(Y)=\frac{2}{3}$. Таким образом, коэффициент корреляции X и Y равен

$$\rho(X,Y)=-\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=-0{,}5.$$

3. В группе 20 студентов. Из них 10 получают стипендию в размере A руб., а другие 10 – в размере B руб. Из группы случайно отобраны 4 студента. Пусть X – их суммарная стипендия. Найти дисперсию X.

Решение. Пусть X_i (i = 1, 2, 3, 4) – стипендия каждого из четырех отобранных студентов. Тогда

$$D(X) = 4\cdot D(X_1) + 12\cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_2).$$

Находим распределение X_i:

X_i	A	B
P	0,5	0,5

Отсюда $M(X_i)=\frac{A+B}{2}$, $D(X_i)=\frac{(A-B)^2}{4}$. Находим двумерное распределение (X_i, X_j) при $i \neq j$. Имеем:

$$P(X_i=A,X_j=A)=P(X_i=A)\cdot P_{X_i=A}(X_j=A)=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}=\frac{9}{38}.$$

$$P(X_i=A,X_j=B)=P(X_i=A)\cdot P_{X_i=A}(X_j=B)=\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{19}=\frac{10}{38}.$$

Аналогично $P(X_i=B,X_j=A)=\frac{10}{38}$ и $P(X_i=B,X_j=A)=\frac{9}{38}$.

Итак, двумерное распределение (X_i, X_j) при $i \neq j$ имеет вид:

	$X_i = A$	$X_i = B$
$X_j = A$	9/38	10/38
$X_j = B$	10/38	9/38

Находим распределение $X_i \cdot X_j$ при $i \neq j$.

$X_i \cdot X_j$	A^2	$A\cdot B$	B^2
P	9/38	2 · 10/38	9/38

Следовательно, $M(X_iX_j)=\frac{1}{38}\left(9A^2+20AB+9B^2\right)$. Поэтому

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = M(X_iX_j) - M(X_i)M(X_j) = \frac{1}{38}\left(9A^2+20AB+9B^2\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\left(A^2+2AB+B^2\right)=-\frac{1}{76}(A-B)^2.$$

Следовательно,

$$D(X)=4\cdot\frac{(A-B)^2}{4}-12\cdot\frac{(A-B)^2}{76}=\frac{16}{19}(A-B)^2.$$

4. Имеется два вида акций, цены которых A и B изменяются случайным образом. Закон распределения двумерной случайной величины (A, B) имеет следующий вид:

	$A = 10$	$A = 20$	$A = 30$

$B = 25$	0,2	0,1	0
$B = 15$	0,1	0,3	0,1
$B = 5$	0	0	0,2

Найти математические ожидания A и B, их дисперсии, ковариацию $\mathrm{Cov}(A, B)$ и коэффициент корреляции $\rho(A, B)$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию $A + B$.

Найдем законы распределения A и B.

A	10	20	30
P	0,3	0,4	0,3

B	25	15	5
P	0,3	0,5	0,2

Отсюда

$$M(A) = 20,\ M(B) = 16,$$

$$D(A) = 30 + 160 + 270 - 400 = 60,\ D(B) = 187{,}5 + 112{,}5 + 5 - 256 = 49,$$

$$M(AB) = 250\cdot 0{,}2 + 500\cdot 0{,}1 + 150\cdot 0{,}1 + 300\cdot 0{,}3 + 450\cdot 0{,}1 + 150\cdot 0{,}2 = 280,$$

$$\mathrm{Cov}(A, B) = 280 - 20\cdot 16 = -40,$$

$$\rho(A, B) = -\frac{40}{\sqrt{60}\sqrt{49}} \approx -0{,}74\,.$$

Теперь нетрудно вычислить числовые характеристики $A + B$.

$$M(A + B) = M(A) + M(B) = 36,$$

$$D(A + B) = D(A) + D(B) + 2\mathrm{Cov}(A, B) = 60 + 49 - 80 = 29.$$

Мы видим, что из двух финансовых инструментов с большими рисками удалось создать новый инструмент с меньшим риском. Это одна из идей, лежащих в основании *портфельного анализа*.

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Что называется распределением дискретного случайного вектора?

3 Как по распределению двумерного дискретного случайного вектора найти распределения его компонент?

3 Как по распределению двумерного дискретного случайного вектора выяснить зависимы или независимы его компоненты?

Упражнения

1. Двумерная случайная величина (X, Y) задана распределением

	$X = 2$	$X = 4$	$X = 6$
$Y = 1$	0,1	0,2	0,3
$Y = 2$	0,2	0,1	0,1

Найти: а) распределение X; б) распределение Y; в) распределение суммы $X + Y$; г) распределение произведения XY; д) ковариацию $\mathrm{Cov}(X, Y)$; е) коэффициент корреляции ρ_{XY}.

2. Дискретные случайные величины X_1 и X_2 независимы и одинаково распределены

X_i	5	10
P	0,4	0,6

Найти: а) распределение суммы $X_1 + X_2$; б) распределение частного X_1/X_2; в) распределение двумерной случайной величины (X, Y), где $X = X_1 + X_2$, $Y = X_1/X_2$; г) ковариацию $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

3. В группе из 15 человек 5 имеют доход 1, другие 5 имеют доход 2 и оставшиеся 5 человек имеют доход 3. а) Из данной группы случайно отбираются два человека. Найти ковариацию их доходов. б) Из данной группы случайно отбираются 5 человек. Найти дисперсию суммарного дохода отобранных людей.

4. Дискретные случайные величины X_1 и X_2 имеют одинаковое распределение вида

X_i	a	b
P	p	q

,

где $a \neq 0$, $b \neq 0$. Доказать, что $M(X_1/X_2) = M(X_2/X_1)$.

5. Дискретные случайные величины X и Y независимы, одинаково распределены и среди конечного множества их возможных значений нет нулевых. Доказать, что $M(X/Y) = M(Y/X)$.

6. В некоторой лотерее на 100 выигрышей разыгрывается 5 выигрышей по 2 и 1 выигрыш по 10. а) Найти ковариацию выигрышей по двум билетам. б) Найти дисперсию суммарного выигрыша по 10 билетам.

7. Двумерная дискретная величина (X, Y) задана распределением

	$Y = 1$	$Y = 3$	$Y = 5$
$X = 2$	0,2	0,1	0
$X = 4$	0,1	0,2	0,1
$X = 6$	0	0,1	0,2

Найти: а) ковариацию $\mathrm{Cov}(X, Y)$; б) коэффициент корреляции X и Y.

§ 3.2. Непрерывные случайные векторы

Случайный вектор (X, Y) называется *абсолютно непрерывным*, если найдется неотрицательная функция $f_{X,Y}(x, y)$, называемая *плотностью распределения*, такая, что для любого множества $G \subset \mathbf{R}^2$, для которого существует интеграл $\iint\limits_G f_{X,Y}(x, y)dxdy$, вероятность попадания точки (X, Y) в G находится по формуле:

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint\limits_G f_{X,Y}(x, y)dxdy\,. \qquad (3.1)$$

Если (X, Y) – абсолютно непрерывный случайный вектор, то вероятность попадания точки (X, Y) в какую-либо линию (прямую, гиперболу, …) равна 0.

Функция распределения $F_{X,Y}(x, y)$ абсолютно непрерывного случайного вектора (X, Y) является непрерывной и может быть представлена в виде несобственного интеграла

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dsdt .$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ (неотрицательность).

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy=1$ (условие нормировки).

3. $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$ в точке непрерывности $f_{X,Y}(x, y)$.

Компоненты X, Y абсолютно непрерывного случайного вектора (X, Y) являются также абсолютно непрерывными. Плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ случайных величин X и Y выражаются через плотность совместного распределения:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy, \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx . \qquad (3.2)$$

Компоненты X, Y абсолютно непрерывного случайного вектора (X, Y) являются независимыми случайными величинами в том и только в том случае, если произведение их плотностей совпадает с плотностью совместного распределения

$$f_X(x)f_Y(y)=f_{X,Y}(x,y) . \qquad (3.3)$$

Математическое ожидание функции $\varphi(x, y)$ от компонент случайного вектора (X, Y) находится путем интегрирования произведения данной функции и плотности распределения:

$$M[\varphi(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy . \qquad (3.4)$$

В частности, математическое ожидание XY находится по формуле:

$$M(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy . \qquad (3.5)$$

Примеры

1. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\cos(x+2y), \text{ если } x+2y\leq\dfrac{\pi}{2},\ x\geq 0,\ y\geq 0,\\ 0 - \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти плотности $f_X(x)$, $f_Y(y)$ распределений X, Y и проверить, будут ли случайные величины независимыми. Вычислить вероятность попадания (X, Y) в квадрат, ограниченный линиями $x=0,\ y=0,\ x=\dfrac{\pi}{4},\ y=\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Находим плотности компонент по формулам (3.2):

$$f_X(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(x+2y)dy=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin x ,$$

$$f_Y(y)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(x+2y)dx=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2y\right)-\sin 2y .$$

В частности, случайные величины X и Y зависимы, поскольку

$$f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y).$$

Действительно, подставим в обе части неравенства $x = 0$, $y = 0$ и получим слева $\cos 0 = 1$, а справа $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Для нахождения искомой вероятности воспользуемся формулой (3.1):

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+2y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+2y\right)-\sin 2y\right)dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cos 2y - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2y\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

2. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (x+y)/3, & \text{если } 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти плотности $f_X(x)$, $f_Y(y)$ распределений X, Y и ковариацию $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Решение. Находим плотности компонент:

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}, \quad 0 \le x \le 2;$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 (x+y)\frac{1}{3}dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}y, \quad 0 \le y \le 1$$

и их математические ожидания:

$$M(X) = \int_0^2 x\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}\right)dx = \frac{11}{9}, \quad M(Y) = \int_0^1 y\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}y\right)dy = \frac{5}{9}.$$

Вычислим математическое ожидание произведения компонент:

$$M(XY) = \int_0^1\int_0^2 xy(x+y)\frac{1}{3}dxdy = \frac{2}{3}.$$

Отсюда получим ковариацию

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = \frac{2}{3} - \frac{11}{9}\cdot\frac{5}{9} = -\frac{1}{81}.$$

3. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\left(x^2+y^2\right), & \text{если } x^2+y^2 \le 4, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти: а) константу c; б) вероятность попадания (X, Y) в кольцо $x^2 + y^2 \ge 1$; в) плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; г) $M(X)$, $D(X)$, $M(Y)$ и $D(Y)$.

Решение. Константу c находим из свойства 2 плотности

$$\iint_D c\left(x^2+y^2\right)dxdy = 1,$$

где область D – это круг радиуса 2 с центром в начале координат. Для вычисления интеграла удобно перейти к полярным координатам по формулам:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = rdrd\varphi,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Тогда

$$\iint_D c\left(x^2+y^2\right)dxdy = c\int_0^2 r^3dr\int_0^{2\pi}d\varphi = 8\pi c = 1,$$

откуда

$$c = \frac{1}{8\pi}.$$

Для нахождения искомой вероятности достаточно в предыдущем интеграле изменить пределы интегрирования по переменной r:

$$P = \frac{1}{8\pi}\int_1^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{15}{16}.$$

Найдем плотности X и Y:

$$f_X(x) = \frac{1}{8\pi}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^2 + y^2\right) dy = \frac{1}{6\pi}\left(x^2 + 2\right)\sqrt{4 - x^2},$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{8\pi}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dx = \frac{1}{6\pi}\left(y^2 + 2\right)\sqrt{4 - y^2}.$$

В частности, случайные величины X и Y *зависимы*, поскольку

$$f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y).$$

Заметим, что функции плотности для случайных величин X и Y – четные функции, а области значений симметричны относительно начала координат, то математические ожидания X и Y равны нулю

$$M(X) = 0,\ M(Y) = 0.$$

По той же причине выполняется равенство

$$M(XY) = 0.$$

Поэтому случайные величины X и Y *некоррелированы*.

Осталось найти дисперсии X и Y, что сводится к вычислению интеграла

$$D(X) = \frac{1}{6\pi}\int_{-2}^{2} x^2\left(x^2 + 2\right)\sqrt{4 - x^2}\, dx,$$

который проще всего найти с помощью тригонометрической замены: $x = 2\cos\varphi$, $dx = -2\sin\varphi d\varphi$ (подробные вычисления оставляем читателю):

$$D(X) = \frac{1}{6\pi}\int 4\cos^2\varphi\left(4\cos^2\varphi + 2\right)2\sin\varphi\left(-2\sin\varphi\right)d\varphi = \frac{4}{3}.$$

Таким образом,

$$D(X) = D(Y) = \frac{4}{3}.$$

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Какая функция называется плотностью совместного распределения двух случайных величин?

3 Как по функции плотности распределения двумерного случайного вектора найти плотности распределения его компонент?

3 Как по функциям плотности распределения двух независимых случайных величин найти плотность их совместного распределения?

Упражнения

8. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{если } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти $P(X + Y > 1)$; б) найти плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; в) будут ли независимыми компоненты X, Y данного случайного вектора? г) Найти $M(X)$, $D(X)$; д) найти $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и ρ_{XY}.

9. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1+x-y, & \text{если } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ 0 - & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти: а) $P(X < Y)$; б) плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; в) $M(X)$, $D(X)$, $M(Y)$ и $D(Y)$; д) $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и ρ_{XY}.

10. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}6(x-y)^2, & \text{если } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ 0 - & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти: а) плотность $f_X(x)$; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и ρ_{XY}.

§ 3.3. Условные распределения и условные математические ожидания

Распределение случайного вектора (X, Y) определяет *условное распределение X при Y = y* и *условное распределение Y при X = x*. Для дискретного случайного вектора эти условные распределения также являются дискретными и описываются условными вероятностями:

$$P(X=x\mid Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)},\qquad P(Y=y\mid X=x)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}. \tag{3.6}$$

Для данного закона распределения $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ эти формулы можно записать в следующем виде:

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}, \tag{3.7}$$

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{p_{ij}}{\sum\limits_j p_{ij}}. \tag{3.8}$$

Формулы (3.6) описывают некоторый закон распределения, для которого могут быть найдены его числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия и т.д. В частности, $X = x_i$ записывается формулой:

$$M(Z\mid X=x_i)=\frac{\sum\limits_j \varphi(x_i,y_j)p_{ij}}{\sum\limits_j p_{ij}}. \tag{3.9}$$

Для случайного вектора (X, Y) с функцией плотности $f_{X,Y}(x, y)$ *условные распределения*:

$$f_{X|Y}(x,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \text{ и } f_{Y|X}(x,y)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}. \tag{3.10}$$

Для условного математического ожидания Y имеем:

$$M(Y\mid X=x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(x,y)\,dy. \tag{3.11}$$

Аналогичная формула справедлива и для условного математического ожидания X:

$$M(X\mid Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x,y)\,dx. \tag{3.12}$$

Выполняются следующие соотношения:

$$M(M(Y\mid X))=M(Y),\ M(M(X\mid Y))=M(Y). \tag{3.13}$$

Примеры

1. Двумерная случайная величина (X, Y) задана распределением:

	$X = 2$	$X = 4$	$X = 6$
$Y = 1$	0,1	0,2	0,3
$Y = 2$	0,2	0,1	0,1

Найти: а) условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y = 2$; б) условное математическое ожидание $X^2 + Y^2$ при условии $Y = 2$.

Решение. Используя формулу (3.8), находим условный закон распределения

$$P(X = 2 \mid Y = 2) = \frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1} = 0{,}5,$$

$$P(X = 4 \mid Y = 2) = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25,$$

$$P(X = 6 \mid Y = 2) = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25.$$

Запишем искомый условный закон распределения X в виде таблицы:

X	2	4	6
$P(X \mid Y = 2)$	0,5	0,25	0,25

После нахождения условного закона распределения не представляет особого труда нахождение условных числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии и т.п. В частности, условное математическое ожидание получается простым подсчетом:

$$M(X \mid Y = 2) = 2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}25 = 2{,}5.$$

Для нахождения условного математического ожидания $X^2 + Y^2$ запишем условные распределения X^2 и Y^2:

X^2	4	16	36
$P(X \mid Y = 2)$	0,5	0,25	0,25

Y^2	1	4
$P(Y \mid Y = 2)$	0	1

Поэтому

$$M\left(X^2 + Y^2\right) = M\left(X^2\right) + M\left(Y^2\right) =$$

$$= 4 \cdot 0{,}5 + 16 \cdot 0{,}25 + 36 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 19.$$

2. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (x + y)/3, & \text{если } 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти а) условные распределения компонент; б) условные математические ожидания.

Решение. Воспользуемся результатами примера 2 § 3.2 и формулами (3.10). Имеем:

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{x + y}{3} : \frac{2y + 2}{3} = \frac{x + y}{2y + 2}, \qquad (3.14)$$

$$f_{Y|X}(x,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{x+y}{3}:\frac{2x+1}{6}=\frac{2x+2y}{2x+1}. \qquad (3.15)$$

Для нахождения условных математических ожиданий применим формулы (3.11), (3.12):

$$M(Y\mid X=x)=\int_0^1 y f_{Y|X}(x,y)dy=\int_0^1 y\,\frac{2x+2y}{2x+1}dy=\frac{x+\frac{2}{3}}{2x+1},\ 0\le x\le 2,$$

$$M(X\mid Y=y)=\int_0^2 x f_{X|Y}(x,y)dx=\int_0^2 x\,\frac{x+y}{2y+2}dx=\frac{\frac{8}{3}+2y}{2y+2},\ 0\le y\le 1.$$

3. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+2y^2}{2}}.$$

Найти: а) условные распределения компонент; б) условные математические ожидания.

Р е ш е н и е. Найдем плотность компоненты X:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+2xy+2y^2}{2}}dy.$$

Выделим полный квадрат по y в показателе степени:

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+2\left(y+\frac{1}{2}x\right)^2-\frac{x^2}{2}}{2}}dy=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y+\frac{1}{2}x\right)^2}d\left(y+\frac{1}{2}x\right).$$

Учитывая, что интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$, получим искомую плотность

$$f_X(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Аналогично находится и плотность компоненты Y (предоставляем читателю выполнить соответствующие выкладки):

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Отсюда легко получим условные плотности:

$$f_{Y|X}(x,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+2y^2}{2}}:\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+2y)^2}{4}},$$

$$f_{X|Y}(x,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+2y^2}{2}}:\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}.$$

Найдем условные математические ожидания:

$$M(Y\mid X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(x,y)dy=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{(x+2y)^2}{4}}dy.$$

Выполним замену переменной $t=x+2y$, $dy=\frac{1}{2}dt$ и получим:

$$M(Y\mid X=x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(t-x)e^{-\frac{t^2}{4}}dt=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{4}}dt-\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4}}dt.$$

Первый интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля интервалу, а второй сводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .$$

Окончательно имеем:

$$M(Y \mid X = x) = -x .$$

Аналогично получим и другое условное математическое ожидание (рекомендуем читателю проделать самостоятельно необходимые вычисления):

$$M(X \mid Y = y) = -2y .$$

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Что понимается под условным распределением дискретного случайного вектора?
3 Какая функция называется условной плотностью распределения?
3 Для независимых дискретных случайных величин X, Y и случайной величины $Z = X + Y$ доказать, что условное математическое ожидание Z имеет вид $M(Z \mid X = x) = x + a$.

Упражнения

11. Двумерная случайная величина (X, Y) задана распределением

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 2$	0,2	0,1	0,1
$Y = 4$	0,2	0,1	0,3

Найти: а) условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y = 4$; б) условное математическое ожидание $X^2 + Y^2$ при условии $X = 2$.

12. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y, & \text{если } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти а) условные распределения компонент; б) условные математические ожидания.

13. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 + 4xy - 5y^2} .$$

Найти: а) условные распределения компонент; б) условные математические ожидания.

§ 3.4. Многомерные равномерное и нормальное распределения

Случайный вектор (X, Y) называется *равномерно распределенным на множестве* $G \subset \mathbf{R}^2$, если для него существует плотность распределения вида:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin G, \\ |G|^{-1}, & (x,y) \in G, \end{cases}$$

где $|G|$ – площадь G. Для равномерно распределенного на G случайного вектора вероятность попадания в множество H вычисляется по формуле:

$$P((X,Y) \in H) = \frac{|H \cap G|}{|G|} . \qquad (3.16)$$

Случайный вектор (X, Y) называется *нормально распределенным на плоскости*, если его функция плотности имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{q}{2\left(1-\rho^2\right)}\right), \qquad (3.17)$$

$$q=\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}, \qquad (3.18)$$

где m_X, m_Y – математические ожидания X, Y, σ_X, σ_Y – средние квадратичные отклонения, $\rho < 1$ – коэффициент корреляции компонент.

Нормально распределенные случайные векторы (X, Y) обладают рядом специфических свойств.

1°. Для нормально распределенного случайного вектора (X, Y) понятия независимости и некоррелированности компонент X и Y эквивалентны.

2°. Для нормального вектора (X, Y) условная плотность одной из компонент при фиксированном значении другой является нормальной. Справедливы формулы:

$$f_{X|Y}(x,y)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_X^2\left(1-\rho^2\right)}\left(x-m_X-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y)\right)^2\right), \qquad (3.19)$$

$$f_{Y|X}(x,y)=\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)}\left(y-m_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)\right)^2\right). \qquad (3.20)$$

3°. Выполняются следующие формулы для условных математических ожиданий и дисперсий:

$$M(X\,|\,Y=y)=m_X+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y), \qquad (3.21)$$

$$D(X\,|\,Y=y)=\sigma_X^2\left(1-\rho^2\right), \qquad (3.22)$$

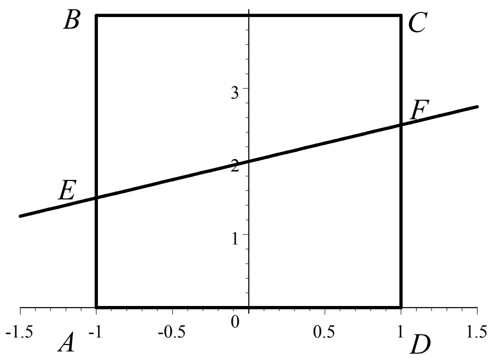
$$M(Y\,|\,X=x)=m_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X), \qquad (3.23)$$

$$D(Y\,|\,X=x)=\sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right). \qquad (3.24)$$

Примеры

1. Непрерывная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в прямоугольнике $\{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4\}$. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности компонент; в) вероятность события $(-X + 2Y \le 4)$.

Решение. Для нахождения плотности (X, Y) достаточно найти площадь прямоугольника $ABCD$



$$S = 2\cdot 4 = 8.$$

Тогда двумерная плотность будет равна $\frac{1}{8}$ внутри прямоугольника и 0 вне *ABCD*.

Компоненты *X* и *Y* также распределены равномерно, поэтому их плотности найти легко:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\le x\le 1,\\ 0 - & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le y\le 4,\\ 0 - & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

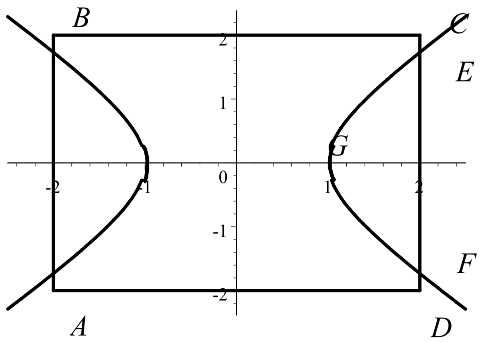
Поскольку $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, то компоненты *X* и *Y* независимые случайные величины.

Для нахождения искомой вероятности заметим, что прямая *EF* разбивает прямоугольник *ABCD* на две равновеликие фигуры, так что

$$P\big((X,Y)\in AEFD\big)=\frac{1}{2}.$$

2. Случайная величина (*X*, *Y*) распределена равномерно в квадрате $\{-2\le x\le 2, -2\le y\le 2\}$. Найти вероятность события $\{X^2-Y^2\ge 1\}$.

Р е ш е н и е . Рассмотрим рисунок



Искомая вероятность находится по формуле:

$$P=\frac{2S_{EFG}}{S_{ABCD}}.$$

Очевидно, что $S_{ABCD} = 16$. Площадь *EFG* равна удвоенному интегралу

$$\int_1^2\sqrt{x^2-1}\,dx=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right),$$

который находится интегрированием по частям: $u=\sqrt{x^2-1}, dv=dx$. Таким образом, вероятность равна

$$P=\frac{2\left(2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)}{16}\approx 0{,}27 .$$

3. Непрерывная случайная величина (*X*, *Y*) распределена по нормальному закону с плотностью

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}e^{-\frac{x^2+4y^2-2xy-6x+18y+21}{6}}. \qquad (3.25)$$

Найти математические ожидания компонент m_X, m_Y; средние квадратичные отклонения компонент σ_X, σ_Y; коэффициент корреляции ρ.

Решение. Определим сначала величины σ_X, σ_Y, ρ. Для этого воспользуемся формулами (3.17), (3.18). Раскроем скобки, приведем подобные и получим, что показатель степени в формуле (3.18) имеет следующий вид:

$$-\frac{q}{2\left(1-\rho^2\right)}=-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left\{\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2}+\frac{y^2}{\sigma_Y^2}-2\frac{xy}{\sigma_X\sigma_Y}\right)+\right.$$
$$+2\left(\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y}m_Y-\frac{1}{\sigma_X^2}m_X\right)+2\left(\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y}m_X-\frac{1}{\sigma_Y^2}m_Y\right)+ \qquad (3.26)$$
$$\left.+\frac{1}{\sigma_X^2}m_X^2-2\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y}m_X m_Y+\frac{1}{\sigma_Y^2}m_Y^2\right\}.$$

Сравнивая коэффициенты при x^2, y^2, xy в (3.25) и (3.26), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\sigma_X^2\left(1-\rho^2\right)=6, \\ 2\sigma_X^2\left(1-\rho^2\right)=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{\sigma_X\sigma_Y\left(1-\rho^2\right)}{\rho}=3. \end{cases}$$

Перемножив первые два уравнения и извлекая корень, получим

$$2\sigma_X\sigma_Y\left(1-\rho^2\right)=3,$$

так что $\rho=\frac{1}{2}$. Теперь нетрудно найти, что $\sigma_X=2, \sigma_Y=1$. Для нахождения m_X, m_Y достаточно сравнить коэффициенты при x и y в (3.25) и (3.26). Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}m_Y-\dfrac{1}{3}m_X=-1, \\ -\dfrac{4}{3}m_Y+\dfrac{1}{3}m_X=3, \end{cases}$$

откуда легко найти $m_X=1, m_Y=-2$. Предоставляем читателю проверить, что, подставляя найденные параметры в (3.17), (3.18), мы получим данную формулу (3.25).

Вопросы и упражнения для самостоятельной работы

Теоретические вопросы

3 Двумерный случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в прямоугольнике $\{a<x<b,\ c<y<d\}$. Докажите независимость случайных величин X и Y.

3 Верно ли, что для нормальных случайных величин X и Y понятия независимости и некоррелированности равносильны? Рассмотрите отдельно два случая, когда 1) (X, Y) – нормальный случайный вектор 2) распределение (X, Y) отлично от нормального.

Упражнения

14. Непрерывная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в круге $x^2+y^2\le 4$. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности компонент; в) вероятность события ($|X|+|Y|\le 2$).

15. Непрерывная случайная величина (X, Y) распределена по нормальному закону с плотностью

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}e^{-\frac{4x^2+y^2-2xy+18x-6y+21}{6}}.$$

Найти математические ожидания компонент m_X, m_Y; средние квадратичные отклонения компонент σ_X, σ_Y; коэффициент корреляции ρ.

Ответы

Глава 1

1. 20. **2**. 190. **3**. 315. **4**. 2160. **5**. 59 049. **6**. 3024. **7**. 20. **8**. 34 650. **9**. 1440. **10**. 5040. **11**. 3168. **12**. 1 481 760. **13**. 646 646. **14**. 10 626. **15**. $1 - 5x^3 + 10x^6 - 10x^9 + 5x^{12} - x^{15}$. **16**. $15a^{10}x^2$. **17**. а) 1,02; б) 0,97. **18**. *Указание*: рассмотрите произвольное множество из n элементов. **19**. 0,5. **20**. 1/36. **21**. 0,0035; 0,066; 0,358; 0,573. **22**. 11/12. **23**. 0,05. 24. а) 0,012; б) 0,0004; в) 0,000003. **25**. 0,37. **26**. 0,4. **27**. 5/9. **28**. 1/4. **29**. 1/2. **30**. $\dfrac{(R-r)(2R+r)}{4(R^2+Rr+r^2)}$. **31**. $(1 - 2r/a)^2$, $2r \le a$. **32**. 1023/1024. **33**. ≥ 2; ≥ 4. **34**. ≥ 5. **35**. ≥ 13. **36**. ≥ 25. **37**. 0.3. **38**. 0,875. **39**. 0,093. **40**. 4/7; 2/7. **41**. 24/35. **42**. 0,388; 0,102; 0,612; 0,898. **43**. 0,96. **44**. 0,88. **45**. $1{,}98 \cdot 10^{-4}$. **46**. 0,972. **47**. а) 0,6; б) 0,2. **48**. 3,45%; 0,36; 0,41; 0,23. **49**. 0,026; 0,095. **50**. а) нет (вер. попадания 0,48); б) равновероятно. **51**. 17/42. **52**. Белый с черным. **53**. 0,998. **54**. а) 5,26; б) 0,982. **55**. 0,991. **56**. ≈1. **57**. 0,574. **58**. 1 белый; 1 белый и 2 черных.

59.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,001	0,01	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,01	0,001

60. 0,375 –2 из 4; 0,273 – 4 из 8. **61**. 103. **62**. 0,729. **63**. а) 0,32; б) 0,243. **64**. а) 0,046; б) 0,994. **65**. 101. **66**. 0,003. **67**. 0,62.

Глава 2

1. 0,5. **2.**

X	1	2	3	4
P	1/3	2/9	4/27	8/27

.

3.

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

. **4.**

X	1	2	3
P	0,2	0,6	0,2

.

5.

X	1	2	3	4	5	6
P	1/36	3/36	5/36	7/36	9/39	11/36

.

6.

X	1	2	3	4	5	6	7
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1

.

7.

$\lvert X \rvert$	0	1	2
P	0,2	0,4	0,4

. **8**. а) 1/2; б) 15/16; **9**. а) 1/55; б) 14/55.

10. 0,8. **11**. 0,6. **12.**

P_0	6	15	18	25
P	0,3	0,3	0,2	0,2

.

13. а) 5/8; б) 2/5. **14.**

Y	1	2	3	4	5
P	1/125	7/125	19/125	37/125	61/125

.

15. Верно. **16**. Являются. **17**. а), б), в) – независимы; г) зависимы. **18**. б) 4. **19**. а) 0,3; б) 0,6. **20**. *Указание*: используя независимость X_1, X_2, X_3, покажите, что случайные величины $\dfrac{X_1}{X_1+X_2+X_3}$, $\dfrac{X_2}{X_1+X_2+X_3}$, $\dfrac{X_3}{X_1+X_2+X_3}$ имеют одинаковое распределение. **21**. а) 4; б) 17. **22**. 0,3. **23**. 0,2. **24**. *Указание*: воспользуйтесь неравенством Йенсена. **25**. а) 0,2; б) 1,7. **26**. а) 5; б) 1. **27**. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **28**. *Указание*: используйте определение дисперсии. **29**. 28. **30**. а) $M(X) = 3{,}5$ и $D(X) = 35/12$; б) 2/3. **31**. 8 и 61. **32**. –1 и 18. **33**. –9 и 172. **34**. 7 и 27. **35**. а) 5 и 2,5; б) 0. **36**. 0,0027. **37**. 5100. **38**. 4 и 12. **39**. 12 и 132. **40**. $M = 14{,}7$; $D = 38{,}99$. **41**. 25 и 18,75. **42**. 12. **43**. а) 1/512; б) 0,00135. **44**. 1/64. **45**. $npq(q - p)$, $q = 1 - p$. **46**. $np(1 - p)[(np)^2 + 3np + 1 - 2p]$. **47**. 0,36. **48**. 0,88. **49**. 55. **50**. 10. **51**. 3. **52**. 0,144. **53**. 432. **54**. 1,2. **55**. 232. **56**. а) да; б) нет. **57**. б) 0. **58**. 0,4. **59**. *Указание*: используйте неотрицательность определителя корреляционной матрицы. **60**. *Указание*: используйте предыдущую задачу. **61**. *Указание*: аналогично предыдущему. **62**. 9%. **63**. 5%. **64**. $\dfrac{\overline{\sigma}^2}{n}+\dfrac{n-1}{n}\overline{c}$. **65**. *Указание*: найдите дисперсию выигрыша по N билетам двумя способами. **66**. 0,5. **67**. 0,5. 68. 1/3. **69**. а) 1/4; б) 1; в) 15/16; г) 0. **70**. 45/512. **71**. $a = -1/9$; $b = 8/9$; $c = -7/9$; $p = 1/3$. **72**. $a = -1/16$; $b = 3/4$; $p = 5/16$. **73**. $c = 1/\pi$. **74**. $f(x) = 2/[\pi(4 + x^2)]$. **75**. $M(X) = 3$. **76**. $F(x) = 1 - e^{-3x}$. **77**. $F(x) = 2\mathrm{arctg}(e^x)/\pi$. **78**. $a = -1/36$; $b = 0$; $c = 1/4$; $p = 0{,}426$. **79**. $c = 1/\pi$, $p = 1/4$. **80**. $p = 1/e^2$. **81**. $f(x) = (2/9)x$; $M = 2$; $D = 0{,}5$. **82**. $f(x) = 2\cos x$; $M = 0{,}26$; $D = 0{,}02$. **83**. $M(X) = 0$, $D(X) = 2$. **84.** 0,3. **85**. 5/12 (без коррекции), 5/6 (с коррекцией). **86**. 7 и 3. **87**. 0,75. **88**. 22 ($p = 0{,}227$). **89**. ≈12%.

Глава 3

1. а)

X	2	4	6
P	0,3	0,3	0,4

; б)

Y	1	2
P	0,6	0,4

;

в)

$X+Y$	3	4	5	6	7	8
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

;

г)

XY	2	4	6	8	12
P	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

;

д) $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = -0{,}28$; е) $\rho\,(X, Y) = -0{,}344$.

2. г) –0,12. **3**. а) –1/21; б) 50/21. **6**. а) –0,0117; б) 10,55. **7**. а) 1,6; б) 2/3. **8**. а) 2/3; б) $f_x(x) = 0{,}5 + x$; в) нет; г) 7/12, 11/144; д) –1/144, –1/11. **9**. а) 1/3; б) $f_x(x) = 0{,}5 + x$, $f_y(y) = 1{,}5 - y$; в) 7/12, 11/144, 5/12, 11/144; г) 1/144, 1/11. **10**. а) $f_x(x) = 2 - 6x + 6x^2$; б) 1/2, 7/60; в) –1/12, –5/7.

11. а)

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

; б) 14; **12**. а) $f_{X|Y}(x,y)=\dfrac{2x+y}{1+y}$,

$f_{Y|X}(x,y)=\dfrac{2x+y}{4x+2}$; б) $M(X\,|\,Y=y)=\dfrac{4+3y}{6+6y}$, $M(Y\,|\,X=x)=\dfrac{4+6x}{3+6x}$

13. а) $f_{X|Y}(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(2y-x)^2}$, $f_{Y|X}(x,y)=\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}e^{-\frac{(5y-2x)^2}{5}}$;

б) $M(X\,|\,Y=y)=2y$, $M(Y\,|\,X=x)=\dfrac{2}{5}x$. **14**. а) $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{1}{4\pi}$ внутри круга и 0 в остальных точках; б) $f_x(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}$, $f_y(y)=\dfrac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}$; в) $\dfrac{2}{\pi}$. **15.** $m_x=-2$, $m_y=1$, $\sigma_X=1$, $\sigma_Y=2$, $\rho=\dfrac{1}{2}$.

Учебное издание

Владимир Алексеевич Бабайцев
Андрей Владимирович Браилов
Александр Самуилович Солодовников

Математика для экономистов
Руководство к решению задач Теория вероятностей

Художественный редактор В.А. Селин
Компьютерный набор В.А. Бабайцев
Компьютерная верстка Л.Б. Галкиной
Корректор Т.Н. Кузнецова

Лицензия ИД № 01322 от 24.03.2000.

Подписано в печать 29.08.2002.
Формат 60x90/16. Гарнитура Таймс.
Усл.п.л. 7,25. Усл.-кр.отт. 7,75. Уч.-изд.л. 2,92.
Тираж 1500 экз.

Финансовая академия
при Правительстве Российской Федерации
125468, Москва, Ленинградский проспект, 49

Отпечатано в ПМБ Финансовой академии
при Правительстве РФ