

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ПОЛИТИКА

№ 6 декабрь 2011 Москва

ОИКОНОМИА • POLITIKA

Главный редактор Владимир May

Редакционная коллегия

Абел Аганбегян, Кристина Георгиева,
Елена Карпухина, Вадим Новиков,
Александр Радыгин, Сергей Синельников—
Мурылев (заместитель главного редактора),
Владимир Фаминский (заместитель главного
редактора), Ксения Юдаева.

Российская академия народного хозяйства
и государственной службы при Президенте РФ
и Институт экономической политики им. Е. Т. Гайдара
Издается при поддержке Всемирного Банка

ДВЕ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ И ИНВЕСТИЦИОННЫЙ АКСЕЛЕРАТОР

Томас Дж. САРДЖЕНТ

Институт Гувера,
Федеральный резервный банк
Миннеаполиса

Оikonomia • Політика

• POLITIKA
• OIKONOMIA

Введение

«Эконометрика рациональных ожиданий» направлена на толкование экономических временных рядов с позиции объектов, которые наиболее важны для экономистов, а именно параметров, описывающих предпочтения, технологии, информационные множества, совокупности, а также концепции равновесия или координационные механизмы. В полностью доработанном состоянии модели рациональных ожиданий равновесного типа обычно дают в результате четкое отображение данных экономически интерпретируемых параметров на определенные моделью моменты временных рядов. В случае если по таким временным рядам имеются точные данные наблюдений, мы можем использовать полученное отображение для внедрения методов оценки параметров либо на основе функции вероятности, либо с использованием метода моментов. Однако, если в отношении интересующих нас переменных существуют лишь некорректные данные со множеством ошибок, понадобится пройти большее количество шагов для извлечения оценок параметров. Фактически нам требуется модель информационного агентства, в достаточной степени эффективная с точки зрения установления соответствия между динамической экономической моделью с измерительным процессом и законом распределения вероятностей для измеренных данных. Выбранная модель агентства по сбору информации является аспектом эконометрической спецификации, который может оказать значительное влияние на формирование выводов об экономической структуре.

Sargent T. J. Two Models of Measurements and the Investment Accelerator // Journal of Political Economy, 1989. Vol. 97. No 2. P. 251—287.

Перевод с английского Бюро переводов «Альба» (Н. Новгород).

В настоящей работе приводится описание двух альтернативных методов генерирования данных. Несмотря на то что общие положения применимы в более широком смысле, автором используются установки, позволяющие реализовать мощные вычислительные методы теории линейных стохастических систем. Таким образом, предполагается, что динамический экономический процесс описывается экономической теорией, которая может быть выражена стохастическим процессом с линейным представлением. При этом рассматриваются две альтернативные линейные модели, связывающие данные, полученные от агентства, с «истинными» данными экономической системы. Первая модель является версией классической «модели с ошибками в переменных». Вторая модель основывается на предположении, что, несмотря на сбор данных со множеством ошибок, что соответствует классической модели с ошибками в переменных, информационное агентство фильтрует данные и дает на выходе максимально близкие к истинным результаты. Обе модели используют одни и те же «глубокие параметры», но на выходе дают различные наборы ограничений данных. После описания обеих моделей и метода расчета функции правдоподобия для каждой из них в работе проиллюстрированы различия в свойствах моделей на примере головоломки, потенциальное решение которой предлагает как минимум одна из представленных моделей. В частности, модели используются для анализа предположения К. Симса¹ о том, что некоторые ограничения, накладываемые на модель ошибок измерения, могут объяснить эмпирический успех теорий ускорителя в применении к спросу на факторы производства, то есть успех, который не может быть спрогнозирован какими-либо теориями равновесных инвестиций в условиях неопределенности. После рассмотрения двух моделей измерения в данном контексте в работе приводится подробная иллюстрация различий в условиях их применения.

1. Две модели измерений: классическая формулировка

В данном разделе выводится классическое (то есть нерекурсивное) определение двух альтернативных моделей ошибок измерений². Идея заключается в том, что экономической теорией определяется стохастический процесс для некоторых истинных переменных, представляющих интерес для экономиста. Экономист (хотя и не являющийся агентом в рамках модели) зависит в плане данных от информационного агентства, которое оперирует только версией данных со множеством ошибок³. В частности, предполагается, что

¹ Sims C. Are There Exogenous Variables in Short-Run Production Relations? // Annals of Economic and Social Measurement. Vol. I. P. 17—36.

² Полезными источниками для изучения классического и рекурсивного подхода к решению задачи выделения сигнала являются работы П. Уиттла (*Whittle P. Prediction and Regulation by Linear Least-Squares Methods. 2nd ed. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1983*), а также Б. Андерсона и Дж. Мура (*Anderson B., Moore J. Optimal Filtering. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1979*). Классический подход в разделе 1 рассматривается главным образом с использованием модели Уиттла, а рекурсивный подход в разделе 2 объясняется с позиций Андерсона и Мура.

³ Экономические агенты в модели *не* зависят от данных, сообщаемых измерительным агентством, что упрощает схему, позволяя избежать некоторых вычислительных и концептуальных нюансов, присутствующих в работе Р. Таунсенда (*Townsend R. Forecasting the Forecasts of Others // The Journal of Political Economy. 1983. Vol. 91. August. P. 546—588*). Схема в настоящей работе отличается от схемы, приведенной в труде Таунсенда, в которой и экономисты, и агенты в рамках моделей должны решать аналогичные либо очень схожие задачи извлечения сигнала. Данные, доступные экономисту и агентам в модели Таунсенда, не искажены ошибками, но частично управляются скрытыми переменными. «Экономические модели», представленные в настоящей работе формулой (1) или (10), могут представлять собой среду, в которой некоторые агенты занимаются решением задач автономного управления и извлечения сигнала, не

измерения агентства описываются классической моделью ошибок измерения и представляют собой совокупность истинных переменных и ортогонального процесса вероятно коррелированных сериями ошибок измерения. Одна из возможных моделей поведения измерительного агентства заключается в простом сообщении накопленных данных с большим количеством ошибок, без попытки исправления ошибок измерения. Данная модель может быть подвергнута эконометрической оценке, при условии того, что экономическая модель будет иметь достаточно жесткие ограничения, например в виде перекрестных вычислений множества рациональных ожиданий, а также при условии наличия достаточно жестких ограничений, накладываемых на процесс ошибки измерения. Свободные параметры модели при этом включают параметры экономической модели и процесса ошибки измерения.

Альтернативная модель информационного агентства подразумевает сообщение линейной проекции истинных данных на запись имеющихся у нее данных с большим количеством шума. В частности, агентство фильтрует данные в свете своих знаний о правильной экономической модели и о процессе ошибок измерения и дает наилучшую возможную оценку истинных данных.

Две рассматриваемые модели информационного агентства требуют применения разных стратегий оценки параметров, особенно при достаточно больших значениях дисперсии измеренных ошибок. Истинность данного утверждения доказывается изучением ветвлений обеих альтернативных моделей в части оценки по методу максимального правдоподобия.

Экономическая модель

Пусть равновесие экономической модели может быть выражено ковариантным стационарным стохастическим процессом с представлением скользящего среднего Вольда в виде:

$$\mathbf{Z}_t = c_{\mathbf{Z}}(L)\epsilon_{\mathbf{Z}t}, \quad (1)$$

где: \mathbf{Z}_t — $n \times 1$ вектор переменных; $c_{\mathbf{Z}}(L) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{\mathbf{Z}j} L^j$, $\epsilon_{\mathbf{Z}t} = \mathbf{Z}_t - E\mathbf{Z}_t | \mathbf{Z}_{t-1}, \dots$; $E\epsilon_{\mathbf{Z}t}\epsilon'_{\mathbf{Z}t} = \mathbf{I}$. Параметры представления скользящего среднего $c_{\mathbf{Z}}(L)$ являются функциями более глубоких параметров модели, которые описывают доступные агентам свойства, возможности и координационные механизмы.

Представление (1) может быть использовано для расчета правдоподобия выборки наблюдений по $\{\mathbf{Z}_t\}$ как функции параметров модели. Если наблюдения \mathbf{Z}_t доступны, то параметры модели могут быть рассчитаны посредством максимизации функции правдоподобия. Хансеном и Сарджентом⁴ были предложены методы вычисления версий представления (1) как функции глубоких экономических параметров, а также показано, как (1) можно использовать при оценке функции правдоподобия.

взаимодействуя при этом с задачей извлечения сигнала, которая стоит перед измерительным агентством. Модели могут также учитывать любое разнообразие линейно-рациональных моделей ожидания, рассмотренных Л. Хансеном и Т. Сарджентом (*Hansen L., Sargent T. Formulating and Estimating Dynamic Linear Rational Expectations Models // Journal of Economic Dynamics and Control. 1980. Vol. 2. February. P. 7—46; Hansen L., Sargent T. Formulating and Estimating Continuous Time Rational Expectations Models // Federal Reserve Bank Staff Report. 1981. No 75*), а также К. Уайтменом (*Whiteman C. Linear Rational Expectations Models: A User's Guide. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1983*), в которых агенты решают задачи управления с полным знанием текущих значений релевантных переменных.

⁴ *Hansen L., Sargent T. Formulating and Estimating Dynamic...; Hansen L., Sargent T. Formulating and Estimating Continuous...*

Классическая модель с ошибками в переменных

Пусть имеется информационное агентство, которому доступна искаженная версия \mathbf{Z}_t , а именно:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{Z}_t + \mathbf{v}_t, \quad (2)$$

где ошибка измерения \mathbf{v} , удовлетворяет условию $E\epsilon_{\mathbf{Z}_t}\mathbf{v}'_s = 0$ для всех t и s , а само характеризуется представлением скользящего среднего Вольда в виде

$$\mathbf{v}_t = c_v(L)\epsilon_{\mathbf{v}t}, \quad (3)$$

где: $c_v(L) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{vj} L^j$, $\epsilon_{\mathbf{v}t} = \mathbf{v}_t - E\mathbf{v}_t | \mathbf{z}_{t-1}, \dots$; а $E\epsilon_{\mathbf{v}t}\epsilon'_{\mathbf{v}t} = \mathbf{I}$. Формулы (2) и (3) означают, что искаженные данные имеют представление скользящего среднего Вольда, выраженное в виде:

$$\mathbf{z}_t = c_z(L)\epsilon_{\mathbf{z}t}, \quad (4)$$

где: $c_z(L) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{zj} L^j$, $\epsilon_{\mathbf{z}t} = \mathbf{z}_t - E\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{t-1}, \dots$; $E\epsilon_{\mathbf{z}t}\epsilon'_{\mathbf{z}t} = \mathbf{I}$. Параметры $c_z(L)$ из формулы (4) связаны с аналогичными параметрами из формул (1) и (3) тождеством спектральных разложений:

$$c_z(s)c_z(s^{-1})' = c_z(s)c_z(s^{-1})' + c_v(s)c_v(s^{-1})', \quad (5)$$

которые должны удовлетворять следующему дополнительному условию: нули определителя $c_z(s)$ должны находиться за пределами единичной окружности. Выражение (5) описывает характер взаимодействия процесса ошибки измерения (3) и экономической модели (1) при определении представления Вольда для данных с множеством ошибок \mathbf{z}_t .

Формулы (1)–(5) образуют модель данных агентства, которое просто сообщает собранные данные с множеством ошибок. В частности, представление (4) и равенство (5) могут быть использованы для формулирования гауссовой функции приближенного правдоподобия для выборки наблюдения за \mathbf{z}_t . Через формулу (5) правдоподобие представляется функцией параметров экономической модели (1) и модели ошибок измерения (3).

Информационное агентство с возможностью фильтрации

Рассмотрим агентство, которое получает $\{\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots\}$, а сообщает $\tilde{\mathbf{z}}_t = E\mathbf{Z}_t | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots$. Предположим, что агентство характеризуется рациональными ожиданиями, а проекция методом наименьших квадратов $E\mathbf{Z}_t | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots$ рассчитывается по корректной вероятностной модели совместного $(\mathbf{Z}_t, \mathbf{z}_t)$ стохастического процесса. Из классической формулы оптимальной фильтрации⁵ получим:

$$\tilde{\mathbf{z}}_t = h(L)\mathbf{z}_t, \quad (6)$$

где

$$h(L) = [c_z(L)c_z(L^{-1})'[c_z(L^{-1})' - 1] + c_z(L^{-1})]. \quad (7)$$

Здесь $[]_+$ — это оператор аннигиляции, определяемый как

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j L^j \right]_+ = \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j L^j \right].$$

Представление скользящего среднего Вольда для $\tilde{\mathbf{z}}_t$ может быть выражено как

$$\tilde{\mathbf{z}}_t = c_{\tilde{z}}(L)\epsilon_{\tilde{z}t}, \quad (8)$$

где: $c_{\tilde{z}}(L) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{\tilde{z}j} L^j$, $\epsilon_{\tilde{z}t} = \tilde{\mathbf{z}}_t - E\tilde{\mathbf{z}}_t | \tilde{\mathbf{z}}_{t-1}; E\epsilon_{\tilde{z}t}\epsilon'_{\tilde{z}t} = \mathbf{I}$.

⁵ См.: Whittle P. Prediction and Regulation by Linear Least-Squares Methods. P. 100.

Оператор $c_{\bar{z}}(L)$ удовлетворяет тождеству спектральных разложений:

$$c_{\bar{z}}(s)c_{\bar{z}}(s^{-1})' = h(s)c_Z(s)c_Z(s^{-1})'h(s^{-1})', \quad (9)$$

где для $c_{\bar{z}}(s)$ должно выполняться следующее дополнительное условие: нули определителя $c_{\bar{z}}(s)$ должны находиться за пределами единичной окружности.

Формулы (7), (8) и (9) определяют гауссову функцию правдоподобия для выборки наблюдений за \bar{z}_t .

Данная модель обеспечивает возможность интерпретации двух свойств процесса представления данных: а) *Поправка на сезонные колебания*⁶: для обоснования данной модели предположим, что компоненты u_t сильно подвержены сезонным колебаниям, а диагонали матрицы спектральной плотности $c_v(e^{-i\omega})c_v(e^{+i\omega})'$ имеют пики, соответствующие частоте сезонных колебаний. Тогда $h(L)$ в формулах (6)–(7) примет форму, которая может быть частично интерпретирована с помощью корректирующего фильтра сезонных колебаний. Следует отметить, что упомянутый фильтр является односторонним для текущих и прошлых выборок \mathbf{z}_t . Двухсторонние фильтры применяются только при проверке предварительных данных. б) *Пересмотр данных*: Предположим, что мы определили модель таким образом, что Z_t содержит текущие и запаздывающие значения каких-либо рассматриваемых переменных, например основные фонды k_t . Для примера пусть k_t, k_{t-1}, k_{t-2} являются компонентами Z_t . Тогда (6), (7) и (8) будут описывать модель, которая одновременно определяет «предварительную» оценку k_t (компоненты $Ek_t | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots$), «пересмотренную» оценку основных фондов за последний период (компонента $Ek_{t-1} | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots$) и «окончательную» оценку фондов за два прошедших периода (компонента $Ek_{t-2} | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots$). В соответствии с данной моделью эффективная оценка параметров может быть получена при условии использования всех данных, включая предварительную, пересмотренную и окончательную оценки, формирующие функцию правдоподобия, описываемую формулами (7), (8) и (9)⁷.

Проблемы расчета

Основными проблемами при применении оценки максимального правдоподобия с помощью операций во временной области являются быстрое

⁶ Данная модель предлагает наиболее привлекательное, по мнению автора, логическое объяснение операций корректировки сезонных колебаний, содержащее, однако, определенные недостатки. Сложно предположить, что основным источником сезонных колебаний измеренных данных является сезонность ошибок измерения. В работе Сарджента (*Sargent T. Macroeconomic Theory. 2nd ed. N.Y.: Academic Press, 1987. P. 336–343*) рассмотрены некоторые опасности использования данных, скорректированных с учетом сезонных колебаний при оценке эконометрических моделей, когда моделируемые агенты принимают решения на основе непроверенных данных без корректировки сезонных колебаний.

⁷ Метод рекурсивных вычислений, предложенный в разделе 3, предполагает одновременное использование «предварительной», «пересмотренной» и «окончательной» оценок в наборе данных $\{\bar{z}_t\}$ при формировании функции правдоподобия. Некоторые варианты ортогонального применения моделей измерения, подобных представленным в настоящей работе, были описаны и испытаны в работе Г. Мэнкью, Д. Ранкла и М. Шапиро (*Mankiw G., Runkle D., Shapiro M. Are Preliminary Announcements of the Money Stock Rational Forecasts? // Journal of Monetary Economics. 1984. Vol. 14. July. P. 15–27*). Характеристики упомянутых авторов отличаются простотой и требуют для испытаний только расчет линейной регрессии. Полученные ими эмпирические результаты указывают на то, что корректировки денежных ресурсов более верны при использовании первой модели измерений. При этом эмпирические результаты, полученные Мэнкью и Шапиро (*Mankiw G., Shapiro M. News or Noise: An Analysis of GNP Revisions // Survey of Current Business, 1986. Vol. 66. May. P. 20–25*) указывают на то, что корректировку ВНП предпочтительнее проводить с помощью второй модели.

получение спектрального разложения (5), расчет $h(L)$ по формуле (7) и спектральное разложение (9)⁸. Данные расчеты представляют большую сложность при использовании классических методов, но стандартизируются в случае применения рекурсивной модели. В следующем разделе рассматривается применение рекурсивных методов.

2. Две модели измерений: рекурсивный метод

В данном разделе представлено переформулирование и уточнение положений предыдущего раздела для применения рекурсивных методов вычисления. В частности, теперь мы будем работать с экономическими моделями и процессами ошибок измерения, которые имеют конечномерные векторы состояния, что позволит нам сформулировать модели в пространстве состояний для применения фильтра Кальмана.

Экономическая модель

Экономическая модель определяется в пространстве состояний следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{Ax}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \\ \mathbf{Z}_t &= \mathbf{Cx}_t, \\ E\boldsymbol{\epsilon}_t\boldsymbol{\epsilon}'_s &= \begin{cases} \mathbf{Q} & \text{при } s = t \\ 0 & \text{при } s \neq t, \end{cases} \\ E\boldsymbol{\epsilon}_t &= 0 \text{ для всех } t. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь \mathbf{x}_t — вектор состояния $n \times 1$, $\boldsymbol{\epsilon}_t$ — белый шум с вектором $n \times 1$, а \mathbf{Z}_t — вектор $m \times 1$ переменных \mathbf{x}_t . Наблюдатель за экономическими параметрами может быть заинтересован в измерении некоторых переменных в \mathbf{Z}_t . Матрица перехода \mathbf{A} размерности $n \times n$ и матрица \mathbf{C} размерности $m \times n$ содержат элементы, которые являются типичными функциями более глубоких параметров, описывающих преференции, технологии, целевые капиталы и правила игры, которые определяют конкретную рассматриваемую модель. Предположим, что собственные значения матрицы \mathbf{A} меньше единицы в модуле. Множество линейных моделей рациональных ожиданий с дискретным временем, изученные Хансеном и Сарджентом⁹, а также К. Уайтменом¹⁰, имеют равновесия, которые могут быть представлены в виде (10).

Формулу (10) также можно использовать для линейных моделей рациональных ожиданий непрерывного времени класса, описанного в работах Хансена и Сарджента. В работах А. Харви и Дж. Стока¹¹ рассмотрено, как преобразовывать модели Хансена и Сарджента, в формат вида (10).

⁸ Посредством аппроксимации частотных характеристик функции правдоподобия модель 1 может быть оценена без разложения (5) (см.: Hansen L., Sargent T. Formulating and Estimating Dynamic...; Hansen L., Sargent T. Formulating and Estimating Continuous...). При использовании модели 2 для расчета $h(L)$ по формуле (7) требуется разложение на число компонент не менее соответствующего формуле (5).

⁹ Hansen L., Sargent T. Formulating and Estimating Dynamic...; Hansen L., Sargent T. Formulating and Estimating Continuous...

¹⁰ Whiteman C. Linear Rational Expectations Models: A User's Guide.

¹¹ Harvey A., Stock J. The Estimation of Higher Order Continuous Time Autoregressive Models // Econometric Theory. 1985. Vol. 1. April. P. 97—112; Harvey A., Stock J. Estimating Integrated Higher Order Continuous Time Autoregressions with an Application to Money-Income Causality // Hoover Institute Working Paper. 1987. No E87-28.

*Классическая модель измерений,
изначально накопленных агентством*

Пусть имеется вектор ошибки измерения \mathbf{v}_t , размерности $m \times 1$, для которого справедливы следующие выражения:

$$\mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{D}\mathbf{v}_t + \mathbf{v}_t, \quad E\mathbf{v}_t\mathbf{v}'_s = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{при } s = t \\ 0 & \text{при } s \neq t, \end{cases} \quad (11)$$

$$E\mathbf{v}_t = 0 \text{ для всех } t, \quad E\mathbf{v}_t\mathbf{v}'_s = 0 \text{ для всех } t \text{ и } s.$$

Собственные значения матрицы \mathbf{D} размерности $m \times m$ полагаются ограниченными по модулю единицей. Предполагается также, что информационное агентство получает искаженную версию \mathbf{Z}_t , то есть \mathbf{z}_t , для которого справедливо выражение:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t. \quad (12)$$

Одна возможная модель предполагает, что информационное агентство просто сообщает \mathbf{z}_t .

Для представления моментов инерции удобно получить авторегрессию вектора (популяции) процесса \mathbf{z}_t с помощью формул (10), (11) и (12). Вектор ошибки в авторегрессии вектора является порожденной случайной величиной для \mathbf{z}_t и может быть принят за белый шум в представлении скользящего среднего Вольда, которое может быть получено «инвертированием» авторегрессионного представления. Авторегрессия вектора популяции и ее зависимость от параметров (10), (11) и (12) несет информацию о том, как интерпретировать вычисленные авторегрессии векторов \mathbf{z}_t . Формирование векторной авторегрессии также является полезным в качестве промежуточного этапа при расчете правдоподобия выборки \mathbf{z}_t как функции свободных параметров $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}\}$. Определенный метод, используемый для формирования авторегрессионного представления, также может служить промежуточным шагом при создании оптимальной модели информационного агентства, выдающего информацию.

Для определения векторной авторегрессии для \mathbf{z}_t воспользуемся рекурсивным методом (фильтрация Кальмана). Пусть¹²:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_t &= \mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{D}\mathbf{z}_t, \\ \bar{\mathbf{v}}_t &= \mathbf{v}_t + \mathbf{C}\epsilon_t, \\ \bar{\mathbf{C}} &= (\mathbf{CA} - \mathbf{DC}). \end{aligned} \quad (13)$$

¹² Процедура формирования представления Вольда с векторными сериально коррелированными ошибками измерения первого порядка использует результаты, полученные в работе Б. Андерсона и Дж. Мура (*Anderson B., Moore J. Optimal Filtering*. P. 290–292). Сначала процедура, описанная упомянутыми авторами, применяется для преобразования системы с векторными сериально коррелированными ошибками измерения первого порядка к системе с ошибками измерения в форме белого шума. Затем используется фильтр Калмана для получения порождающего представления наблюдаемых величин, что дает возможность получить в итоге представление Вольда. Операции формирования проекций переменных скрытых состояний и ошибок измерения в истории наблюдения за переменными являются стандартными. Метод построения функции правдоподобия с помощью порождающего представления также является стандартным (см. *Harvey A. Time Series Models*. N. Y.: Halsted, 1981; *Ljung L., Soderstrom T. Theory and Practice of Recursive Identification*. Cambridge, MA: MIT Press, 1983).

Тогда выражения (10), (11) и (12) будут описывать систему в пространстве состояний¹³:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{Ax}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \\ \bar{\mathbf{z}}_t &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}_t + \bar{\boldsymbol{\nu}}_t, \end{aligned} \quad (14)$$

где $(\boldsymbol{\epsilon}_t, \bar{\boldsymbol{\nu}}_t)$ — процесс белого шума с ковариационной матрицей.

$$E\begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_t \\ \bar{\boldsymbol{\nu}}_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_t \\ \bar{\boldsymbol{\nu}}_t \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{QC}' \\ \mathbf{CQ}' & \mathbf{R} + \mathbf{CQC}' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_1' & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Система (14) и (15) характеризуется пятью матрицами $[\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{R}_1, \mathbf{W}_1]$. Связывая порождающее представление для $\bar{\mathbf{z}}_t$ с формулами (14) и (15), получим:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t+1} &= \mathbf{Ax}_t + \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_t, \\ \bar{\mathbf{z}}_t &= \bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{u}_t, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_t &= E[\mathbf{x}_t | \bar{\mathbf{z}}_{t-1}, \bar{\mathbf{z}}_{t-2}, \dots, \bar{\mathbf{z}}_0, \hat{\mathbf{x}}_0] = E[\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots, \mathbf{z}_0, \hat{\mathbf{x}}_0], \\ \mathbf{u}_t &= \bar{\mathbf{z}}_t - E[\bar{\mathbf{z}}_t | \bar{\mathbf{z}}_{t-1}, \bar{\mathbf{z}}_{t-2}, \dots] = \mathbf{z}_{t+1} - E[\mathbf{z}_{t+1} | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots], \\ [\mathbf{K}_1, \mathbf{S}_1] &= \text{kfilter}(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{R}_1, \mathbf{W}_1), \end{aligned} \quad (17)$$

где kfilter представляет собой матрицу-функцию, определяемую в Приложении А, и

$$\mathbf{S}_1 = E(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)'). \quad (18)$$

В формуле (17) \mathbf{u}_t — это инновационный процесс для процесса \mathbf{z}_t . Система (16) и определение (13) могут использоваться для получения векторного представления скользящего среднего Вольда для процесса \mathbf{z} :

$$\mathbf{z}_{t+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{DL})^{-1}[\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{I} - \mathbf{AL})^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{L} + \mathbf{I}]\mathbf{u}_t. \quad (19)$$

Из (14) и (16) получим:

$$E\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t' = \bar{\mathbf{C}}E(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)' \bar{\mathbf{C}}' + \mathbf{R}_1 = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{S}_1\bar{\mathbf{C}}' + \mathbf{R}_1 \equiv \mathbf{V}_1. \quad (20)$$

Гауссова логарифмическая функция правдоподобия для выборки $\{\mathbf{z}_t, t=0, \dots, T\}$ с условием оценки начального состояния $\hat{\mathbf{x}}_0$ может быть представлена в следующем виде:

$$L^* = -T \ln 2\pi - 0,5T \ln |\mathbf{V}_1| - 0,5 \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{u}_t' \mathbf{V}_1^{-1} \mathbf{u}_t, \quad (21)$$

где \mathbf{u}_t — это функция $\{\hat{\mathbf{x}}_0; \bar{\mathbf{z}}_{t-s}, s=0, \dots, T-1\}$, полученная из системы (16). При использовании системы (16) для расчета $\{\mathbf{u}_t\}$ целесообразно представить ее как

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t+1} &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_1 \bar{\mathbf{C}})\hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_1 \bar{\mathbf{z}}_t, \\ \mathbf{u}_t &= -\bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_t + \bar{\mathbf{z}}_t. \end{aligned} \quad (22)$$

¹³ Альтернативным способом применения сериально коррелированных ошибок измерений является возможность получения выражения (14), не прибегая к трансформации данных. Такая альтернатива представляет ошибки измерения в каждой серии в виде суммы авторегрессионного процесса и ортогонального белого шума. Авторегрессионная компонента процесса ошибки измерения включается в вектор состояния стандартным методом, что позволяет представить систему в пространстве состояний с векторным процессом ошибки измерения в виде белого шума. Рассматриваемая операция не предполагает проведения трансформаций, ведущих к (14). Вместо этого предполагается получение системных матриц, которые крупнее, но заполнены менее плотно. Способ изменения расчетов для обработки сериально коррелированных ошибок измерения высокого порядка приведен в Приложении Б.

Если мы имеем \hat{x}_0 , формула (22) может быть использована рекурсивно для вычисления процесса $\{\mathbf{u}_t\}$. Формулы (21) и (22) дают функцию правдоподобия выборки искаженных данных $\{z_t\}$.

Модель оптимальных оценок, опубликованных агентством

Предположим, что вместо публикации искаженных данных \mathbf{z}_t информационное агентство предоставляет линейные проекции истинных данных на историю искаженных данных по методу наименьших квадратов. Для реализации данного условия нам необходимо применить к информационному агентству модель совместного процесса генерации истинных данных и ошибок измерения. Здесь также предположим, что «информационное агентство обладает рациональными ожиданиями», то есть информационному агентству известна экономическая структура и принцип измерений, в результате которых получаем (14)–(15).

Для подготовки собственных оценок информационное агентство самостоятельно делает расчеты по фильтру Кальмана, чтобы получить порождающее представление (16). При этом вместо того, чтобы передавать искаженные данные \mathbf{z}_t , агентство передает $\tilde{\mathbf{z}}_t = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_t$, где \mathbf{G} — это «матрица выборки», которая может быть равна \mathbf{C} для данных, передаваемых агентством. Для данных справедливо выражение: $\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_t = E[\mathbf{G}\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots, \mathbf{z}_0, \hat{\mathbf{x}}_0]$. Тогда представление сообщаемых данных в пространстве состояний будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{t+1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{u}_t, \\ \tilde{\mathbf{z}}_t &= \bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_t,\end{aligned}\tag{23}$$

где первая строка выводится из представления (16). Отметим, что \mathbf{u}_t является порожденной величиной по отношению к \mathbf{z}_{t+1} и не является таковой для $\tilde{\mathbf{z}}_t$ ¹⁴.

Получение представления Вольда для $\tilde{\mathbf{z}}_t$ и функции правдоподобия для выборки $\tilde{\mathbf{z}}_t$ требует формулировки порождающего представления для (23). Преобразуем выражение (23) с целью его обобщения:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{t+1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{u}_t, \\ \tilde{\mathbf{z}}_t &= \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_t + \boldsymbol{\eta}_t,\end{aligned}\tag{24}$$

где $\boldsymbol{\eta}_t$ — это процесс ошибок измерения белого шума типа 2 («опечаток»), предположительно, очень малой ковариационной матрицей вида:

$$E\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t \mathbf{u}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t \mathbf{u}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t \mathbf{V}_t \mathbf{K}_t' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix},\tag{25}$$

где \mathbf{R}_2 — вероятно, близко к нулю или равно нулю¹⁵.

¹⁴ Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{G} , а также векторы \mathbf{x}_t , $\hat{\mathbf{x}}_t$ и $\tilde{\mathbf{z}}_t$ могут быть легко определены для использования модели коррекции данных, приведенной в разделе 1. Например, в модели, рассмотренной в разделе 3, вектор состояний может быть расширен до вида $[k_t, \theta_t, k_{t-1}, k_{t-2}]$, а матрица \mathbf{G} может быть расширена для получения оценки k_{t-1} и k_{t-2} на основе наблюдений с множеством ошибок за время t .

¹⁵ Если \mathbf{R}_2 обладает свойством сингулярности, то формулы фильтрации Кальмана необходимо скорректировать посредством образований, соответствующих «наблюдателю приведенного порядка». На практике, если требуется смоделировать ситуацию, когда мы полагаем \mathbf{R}_2 сингулярным (например, матрицей нулей), фильтр Калмана можно продолжать использовать так, как описано в статье, если при этом использовать положительно определенную \mathbf{R}_2 для аппроксимации сингулярной матрицы. Данная операция применяется в расчетах раздела 3. В частности, нулевая матрица \mathbf{R}_2 аппроксимируется матрицей $(0,000001)\mathbf{I}$, где \mathbf{I} — единичная матрица.

Для систем (24) и (25) порождающее представление принимает вид:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{t+1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_2\mathbf{a}_t, \\ \tilde{\mathbf{z}}_t &= \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{a}_t,\end{aligned}\tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_t &= \tilde{\mathbf{z}}_t - E[\tilde{\mathbf{z}}_t | \tilde{\mathbf{z}}_{t-1}, \tilde{\mathbf{z}}_{t-2}, \dots], \\ \hat{\mathbf{x}}_t &= E[\hat{\mathbf{x}}_t | \tilde{\mathbf{z}}_{t-1}, \tilde{\mathbf{z}}_{t-2}, \dots], \\ \mathbf{S}_2 &= E(\hat{\mathbf{x}}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\hat{\mathbf{x}}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)', \\ [\mathbf{K}_2, \mathbf{S}_2] &= \text{kfilter}(\mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}_2, \mathbf{R}_2, 0),\end{aligned}\tag{27}$$

где kfilter снова представляет собой матрицу-функцию, определяемую в приложении А. Таким образом, $\{\mathbf{a}_t\}$ является порождающим процессом для переданных данных $\tilde{\mathbf{z}}_t$ с существующей ковариационной матрицей вида:

$$E\mathbf{a}_t\mathbf{a}'_t = \mathbf{G}\mathbf{S}_2\mathbf{G}' + \mathbf{R}_2 \equiv \mathbf{V}_2.\tag{28}$$

Представление скользящего среднего Вольда для $\tilde{\mathbf{z}}_t$ следует из системы (26) и имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{z}}_t = [\mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{K}_2\mathbf{L} + \mathbf{I}]\mathbf{a}_t.\tag{29}$$

При использовании метода, аналогичного рассмотренному в предыдущем разделе, гауссово логарифмическое правдоподобие для $\tilde{\mathbf{z}}_t$ может быть определено посредством вычисления последовательности $\{\mathbf{a}_t\}$ из наблюдений за $\tilde{\mathbf{z}}_t$ с помощью

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{t+1} &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_2\mathbf{G})\hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_2\tilde{\mathbf{z}}_t, \\ \mathbf{a}_t &= -\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_t + \tilde{\mathbf{z}}_t.\end{aligned}\tag{30}$$

Тогда функция правдоподобия для выборки T наблюдений $\{\tilde{\mathbf{z}}_t\}$ примет следующий вид:

$$L^{**} = -T \ln 2\pi - 0,5 T \ln |\mathbf{V}_2| - 0,5 \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{a}'_t \mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{a}_t.$$

Отметим, что, по сравнению с вычислением функции правдоподобия (21) для искаженных данных, определение функции правдоподобия для оптимально отфильтрованных данных требует больше расчетов. Обе функции правдоподобия работают с рассчитанным фильтром Кальмана в виде (17), но функция для отфильтрованных данных также требует вычисления фильтра Кальмана в виде (27). Фактически, для интерпретации и использования отфильтрованных данных, передаваемых агентством, необходимо просто выполнить в обратном порядке действия, которые агентство предпринимало для синтеза указанных данных¹⁶.

3. Равновесное инвестирование в условиях неопределенности, ошибки измерения и инвестиционный акселератор

Для понимания принципов поведения совокупных инвестиций в данном разделе рассматриваются две модели измерений. В частности, показана взаимосвязь инвестиционного акселератора с теориями равновесия инвес-

¹⁶ Предполагается, что фильтр Кальмана в виде (17) формулируется агентством. При этом для агентства нет необходимости применения фильтра Кальмана в виде (27), поскольку отфильтрованные данные не требуют представления Вольда.

тиций в условиях неопределенности. Под акселератором понимается односторонняя проекция уровня капиталовложений в фактор производство на текущие и запаздывающие измеренные значения произведенной продукции. Существующие теории равновесия инвестиций в условиях неопределенности в общем случае не ведут к соответствию регрессиям акселератора. Данные теории даже прогнозируют неудачное прохождение акселератором определенных испытаний. Несмотря на это, стремление к хорошему статистическому соответству при анализе инвестиций или трудовой занятости часто приводит практических исследователей к применению акселераторов инвестиций или трудовой занятости. Далее акселераторы подвергались детальным испытаниям, например причинному тесту Грейндженера, как было рассмотрено в работе К. Симса¹⁷, а также А. Абеля и О. Бланшара¹⁸, и успешно прошли их. В частности, упомянутые исследования показали, что величины поставок или произведенной продукции являются причинами по Грейндженеру для основных фондов или занятости, но при этом доказательств обратной причинности Грейндженера найдено крайне мало. Полученные результаты противоречат существующим теориям равновесных инвестиций в условиях неопределенности как для частично равновесного множества¹⁹, так и для множества с общим равновесием²⁰. Теории равновесных инвестиций в условиях неопределенности предполагают, что фонды производственных факторов, произведенная продукция, цены и другие переменные являются совместно определяемыми стохастическими процессами и что каждый параметр зависит от истории всех потрясений в системе. Данное предположение означает, что проекции инвестиций на произведенную продукцию в общем смысле станут двухсторонними для прошлых и текущих значений.

В данном разделе для решения упомянутой задачи используются указания, представленные в работе Симса²¹, и две модели измерений. Суть решения заключается в ограничении равновесной модели с тем, чтобы получить только один источник случайного возмущения, например потребительский шок в модели Лукаса—Прескотта²² или технологический шок в модели Брука—Мирмана²³. Для линейной модели предположение об одном шоке создает равновесие между произведенной продукцией, капиталом и другими переменными (такими как выход продукции в модели Лукаса—Прескотта или потребление в модели Брука—Мирмана). Для стохастического процесса со спектральной плотностью одного порядка для всех частот каждая отдельно

¹⁷ Sims C. Are There Exogenous Variables in Short-Run Production Relations?

¹⁸ Abel A., Blanchard O. Investment and Sales: Some Empirical Evidence / Paper presented at NBER meetings, Cambridge, Mass., July 1983.

¹⁹ См., например: Lucas R. Jr., Prescott E. Investment under Uncertainty // Econometrica. 1971. Vol. 39. September. P. 659—681; Eichenbaum M. A Rational Expectations Equilibrium Model of Inventories of Finished Goods and Employment // Journal of Monetary Economics. 1983. Vol. 12. No 2. P. 259—277; Eichenbaum M. Rational Expectations and the Smoothing Properties of Inventories of Finished Goods // Journal of Monetary Economics. 1984. Vol. 14. No 1. P. 71—96; Sargent T. Macroeconomic Theory.

²⁰ Brock W., Mirman L. Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case // Journal of Economic Theory. 1972. Vol. 4. June. P. 479—513; Sargent T. Tobin's q and the Rate of Investment in General Equilibrium // On the State of Macroeconomics. Supplement to Journal of Monetary Economics / K. Brunner, A. Meltzer (eds.). Amsterdam: North-Holland, 1980 (Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. Vol. 13).

²¹ Sims C. Money, Income, and Causality // The American Economic Review. 1972. Vol. 62. No 4. P. 540—552; Sims C. Output and Labor Input in Manufacturing // Brookings Papers of Economic Activity. 1974. No 3. P. 695—728.

²² Lucas R. Jr., Prescott E. Investment under Uncertainty.

²³ Brock W., Mirman L. Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case.

взятая переменная выражается отдельным односторонним распределенным лагом белого шума. Если каждый из распределенных лагов поддается обратному преобразованию и если все переменные измеряются с достаточной степенью точности, то ни одна переменная не будет причиной по Грейнджеру для другой переменной, а проекция одного процесса на любой другой будет односторонней для текущих и запаздывающих значений. Однако утверждается, что капитал, выход продукции и другие переменные измеряются недостаточно точно и что результаты наблюдения за каждой переменной искажены сериально коррелированными ошибками измерения. Для начала используем первую модель информационного агентства, согласно которой агентство просто сообщает искаженные данные. Пусть ошибки измерения распределены неоднородно: объем произведенной продукции измерен относительно точно, а капитал измерен относительно неточно. Тогда измеренный процесс с большим количеством ошибок будет иметь свойство, заключающееся в том, что каждая переменная является причиной по Грейнджеру для всех остальных переменных по отдельности, но наиболее точно измеренная переменная (выход продукции) демонстрирует наименьшую обратную связь от других переменных, а также наилучшую прогнозирующую способность для других переменных. В данном разделе показано, как выбрать параметры равновесной модели и процессов ошибок измерения, чтобы получить стохастический процесс, для которого акселератор хорошо соответствует искаженным данным и для которого сложно определить причину по Грейнджеру от остальных переменных до выхода в малых выборках. В рассматриваемом примере эмпирический успех акселератора отражает искажение данных ошибками и расположение регрессий по методу наименьших квадратов к решению задач извлечения сигнала. При этом эмпирический успех не обязательно плохо соответствует теориям равновесия или «теориям акселератора», согласно которым инвестиции представляют собой распределенный лаг дохода или выпуска продукции, неизменный в случае вмешательства²⁴.

После демонстрации вариантов реализации первой модели ошибки измерений в работе рассматриваются изменения интерпретаций под влиянием второй модели измерений с помощью линейно-квадратичной версии оптимальной модели вероятностного роста, изученной в работе Сарджента²⁵. Модель соответствует условиям, изложенным в разделе 2. С целью получения соотношений для акселератора на модель наложено ограничение, суть которого заключается в том, что модель должна иметь только один

²⁴ Если данные временного ряда искажены ошибками измерения, то задача извлечения сигнала (или эквивалентная задача получения оптимального прогноза) автоматически решается применением метода наименьших квадратов для установления соответствия между данными и векторными авторегрессиями, которые, в силу самого факта, являются оценочными версиями представлений Вольда, а их порождения сводятся к фундаментальному вектору белого шума, присутствующего в представлении Вольда. То есть векторные авторегрессии восстанавливают представления Вольда в виде (4) или (19) из данных с большим количеством ошибок. В работе Хансена и Сарджента (*Hansen L., Sargent T. Two Difficulties in Interpreting Vector Autoregressions // Federal Reserve Bank Working Paper. 1982. No 227*) приводится описание двух задач, связанных с интерпретацией представлений Вольда и «порождающим представлением» Симса (*Sims C. Macroeconomics and Reality // Econometrica. 1980. Vol. 48. January. P. 1–48*) в отношении вопросов, рассматриваемых в данном разделе. Хансен и Сарджент описали два случая, в которых нет ошибок измерения в привычном смысле, векторные авторегрессии присущи данным, доступным экономисту, а порождения, восстановленные векторными авторегрессиями, содержат меньше информации, чем доступные агентам в модели. Упомянутые случаи характеризуются соответственно «задачей обратимости» и «агрегацией времени». Хансен и Сарджент предлагают методы решения указанных задач, тесно связанные с методами, рассматриваемыми в настоящей работе.

²⁵ *Sargent T. Macroeconomic Theory. P. 376–377.*

источник случайного шока — шок целевого капитала²⁶. Наличие нескольких источников шока, например шока преференции или шока государственных расходов, не позволит получить акселератор в том виде, как он показан ниже. Чтобы получить точную версию акселератора, на модель накладываются также и другие ограничения, о которых речь пойдет далее. Упомянутые ограничения применяются с тем, чтобы исследовать, какие предположения необходимо сделать для акселератора, и понять его уникальность в свете равновесных теорий инвестирования.

В рамках социального планирования происходит максимизация вида:

$$E \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left(u_0 + u_1 c_t - \frac{u_2 c_t^2}{2} \right), \quad (31)$$

которая соответствует технологии

$$c_t + k_{t+1} = fk_t + \theta_t, \quad \beta f^2 > 1, \quad (32)$$

$$a(L)\theta_t = \epsilon_t, \quad (33)$$

где $a(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_r L^r$ и где $a(L)$ имеет условие $|z| > 1$ при $a(z) = 0$. Здесь c_t — потребление за t , k_t — основные фонды за t , E — оператор математического ожидания, θ_t — шок целевого капитала или технологический шок, следующие за r -м порядком авторегрессионного процесса вида (33), а $\epsilon_t = \theta_t - E[\theta_t | \theta_{t-1}, \theta_{t-2}, \dots]$. Задачей социального планирования является максимизация (31) при условии (32) и (33) посредством выбора «осуществимого» плана действий при непредвиденных обстоятельствах для $\{c_t, k_{t+1}\}$ как функции информации, доступной в момент времени t и подлежащей условию ограниченности $E \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j k_t^2 < \infty$. Известны первоначальные основные фонды k_0 и набор данных $k_t, \theta_t, \theta_{t-1}, \dots, \theta_{t-r}$, доступных в момент времени t планировщику.

Решение данной задачи может быть представлено в виде следующего правила принятия оптимальных решений для c_t :

$$c_t = \frac{-\alpha}{f-1} + \left(1 - \frac{1}{\beta f^2}\right) \left[\frac{L - f^{-1} a(f^{-1})^{-1} a(L)}{L - f^{-1}} \theta_t + fk_t \right], \quad (34)$$

$$k_{t+1} = fk_t + \theta_t - c_t,$$

где $\alpha = u_1 [1 - (f\beta)^{-1}] / u_2$. Выражения (33) и (34) представляют собой определяемые перекрестными вычислениями ограничения, характерные для модели рациональных ожиданий.

Чтобы вывести теорию для акселератора, определим чистый объем производства или национальный доход как

$$y_{nt} = (f-1)k_t + \theta_t. \quad (35)$$

Отметим, что выражения (32) и (35) означают, что $(k_{t+1} - k_t) + c_t = y_{nt}$. Сделаем два специальных предположения, которые одновременно представляют собой версию геометрически распределенного лага функции потреб-

²⁶ Данная модель представляет собой «не поддающуюся наблюдению индексную модель», как она определяется в работе Сарджента и Симса (Sargent T., Sims C. Business Cycle Modeling without Pretending to Have Too Much a Priori Economic Theory // New Methods in Business Cycle Research / C. Sims (ed.). Minneapolis: Federal Reserve Bank, 1977) с изменениями априорной структуры, достаточными для проведения идентификации.

ления по Фридману²⁷ и акселератора распределенного лага. Предположим, что: 1) $a(L) = I$ и 2) $\beta f = 1$. Предположение 1 означает, что технологический шок выражен белым шумом, а согласно предположению 2, ставка дохода по капиталу равна ставке временных предпочтений. Предположение 1 является необходимым для некоторых результатов, в то время как предположение 2 влияет только на величины различных констант²⁸. Предположение 1 используется для получения как строгой версии акселератора распределенного лага, так и модели геометрически распределенного лага Фридмена. Смягчение предположения 1 все еще позволяет выражать потребление и инвестиции через односторонние распределенные лаги дохода y_{nt} .

С учетом предположений 1 и 2 выражение (34) примет следующий вид:

$$c_t = (1 - f^{-1})\theta_t + (f - 1)k_t \quad (36)$$

При использовании выражений (36), (35) и (32) оптимальное потребление и план накопления капитала удовлетворяют следующим ограничениям²⁹:

$$c_t = \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta L} \right) y_{nt}, \quad (37)$$

$$k_{t+1} - k_t = f^{-1} \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta L} \right) y_{nt}, \quad (38)$$

$$y_{nt} = \theta_t + (1 - \beta)(\theta_{t-1} + \theta_{t-2} + \theta_{t-3} + \dots). \quad (39)$$

Выражение (37) представляет собой версию модели потребления Фридмена для данных временного ряда и выражает потребление в виде геометрически распределенного лага дохода. Кроме того, выражение (37) соответствует предположению Фридмена³⁰ о том, что геометрический коэффициент затухания, используемый в дисконтировании данных за прошедший период, равен коэффициенту, связанному с дисконтированием будущих данных³¹. Выражение (38) является версией акселератора распределенного лага, выражающей инвестиции через геометрически распределенный лаг первой разности дохода. Выражение (39) означает, что первая разница конечного дохода является процессом скользящего усреднения первого порядка с порождением, равным порожденной величине шока целевого капитала θ_t . Таким образом, y_{nt} представляет собой вероятностный процесс, который, как показано в работе Дж. Мута³², является оптимальным прогнозом, составленным посредством геометрически распределенного лага или схемы «адаптивных ожиданий».

²⁷ Friedman M. A Theory of the Consumption Function. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1957.

²⁸ Предположение о том, что $\beta f = 1$ позволяет утверждать, что для решения (34) c_t соответствует мартингалу, независимо от значения, предполагаемого оператором $a(L)$. Р. Холл (Hall R. Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence // The Journal of Political Economy, 1978. Vol. 86. December. P. 971–987) в своей работе показал, как подобная мартингальная характеристика (предельная полезность) потребления может быть получена из постановки задачи (31)–(33).

²⁹ Sargent T. Macroeconomic Theory. P. 376–377.

³⁰ Friedman M. Windfalls, the ‘Horizon,’ and Related Concepts in the Permanent-Income Hypothesis // Measurement in Economics: Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memory of Yehuda Grunfeld / C. Christ et al. Stanford, CA: Stanford University Press, 1963.

³¹ В работе Сарджента (Sargent T. Macroeconomic Theory) версия модели, показанной в данном разделе, рассматривается для изучения предположения Фридмена более подробно, чем в настоящей статье.

³² Muth R. Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts // Journal of the American Statistical Association. 1960. Vol. 55. June. P. 299–306.

Рассмотренные условия соответствуют акселератору в строгом смысле, когда инвестиции представляются распределенным лагом изменения дохода. Перед тем как перейти к рассмотрению модификаций модели, описывающих акселератор в менее строгом смысле, отметим, как вышеуказанная модель использует специальные предположения для получения выражения вида (38). Предположение 1 является необходимым для получения (38), в частности для получения условия $(1 - L)$ в числителе правой части выражения, которое дает (38) свойство акселератора. Когда проявляются ограничения, накладываемые на выражение (34) перекрестным вычислением, функция потребления и, в свою очередь, эквивалентная проекция c_t на $\{y_{nt}, y_{nt-2}, \dots\}$, представленная в (38), становятся функциями параметров авторегрессионного процесса $a(L)$ для θ_t . Такая зависимость специальной формы выражения (38) от специального предположения $a(L) = I$ представляет важность в свете широко распространенной практики постулирования сериально коррелированных технологических шоков³³, а также по причине наличия у модели готовой повторной интерпретации, в которой θ_t фактически представляет собой разность между технологическим шоком τ_t и вероятностным процессом для правительственные закупок g_t , когда $\theta_t = \tau_t - g_t$. Показанные выше математические выкладки требуют, чтобы как τ_t , так и g_t представляли собой белый шум с целью обеспечения истинности выражения (38). Кроме того, любая проекция выражения (38) не может быть неизменной по отношению к гипотетическим интервенциям, которые изменяют прогнозируемую часть вероятностного процесса для $\{g_t\}$ (например, любая интервенция, изменяющая многочлен, соответствующий $a(L)$ для g_t).

Если предположение 1 опустить, так чтобы параметр θ_t стал сериально коррелированным, то соотношения для акселератора приобретают более общий смысл. Так как равновесие может быть представлено посредством выражения каждой переменной в виде обратимого распределенного лага единственного источника случайности, такого как θ_t , то соотношения акселератора будут тогда характеризовать модель в широком смысле, когда инвестирование определяется в виде одностороннего распределенного лага текущего дохода и дохода за прошедший период³⁴. Проекция инвестиций на доход является односторонней в отношении дохода как за прошедший, так и за текущий период и равна самим инвестициям (с учетом среднеквадратичной погрешности). Однако у структур данного класса z -преобразование коэффициентов проекции инвестиций на текущий и прошлый доход не будет нулевым при $z = 1$, так как в числителе выражения (38) стоит $(1 - L)$. Кроме

³³ См., например: Kydland F., Prescott E. Time to Build and Aggregate Fluctuations // Econometrica. 1982. Vol. 50. November. P. 1345—1370.

³⁴ Для получения обратимости распределения лага для θ_t достаточно наложить на $a(L)$ и β дополнительное условие, которое заключается в том, что многочлен $\{(L - \beta a(\beta)^{-1}a(L))/(L - \beta)\}$ в правой части выражения (34) не имеет нулей в пределах единичной окружности. Условие обратимости говорит о том, что текущие и запаздывающие значения случайного процесса $\{(L - \beta a(\beta)^{-1}a(L))/(L - \beta)\}\theta_t$ создают то же линейное пространство, что и текущие и запаздывающие значения θ_t . Если указанное условие нарушить, то даже при равнозначной для всех частот спектральной плотности $(1 - L)c_t$, $(1 - L)k_{t+1}$, $(1 - L)y_{nt}$ представление Вольда для данных переменных будет иметь более одного белого шума. Это означает, что у одной переменной по отношению к другой может возникнуть ненулевая причинность Грейнджа. Обратимость оператора $\{(L - \beta a(\beta)^{-1}a(L))/(L - \beta)\}$ рассматривается в работах Хансена и Сарджента (Hansen L., Sargent T. Formulating and Estimating Dynamic...; Hansen L., Sargent T. Two Difficulties in Interpreting Vector Autoregressions // Federal Reserve Bank Working Paper. 1982. No 227), а также в статье К. Футии (Futia C. Rational Expectations in Stationary Linear Models // Econometrica 1981. Vol. 49. January. P. 171—192), где показан случай наложения обратимости оператора ограничений на β и $a(L)$ в дополнение к тем ограничениям, которые следуют из условия стационарности θ_t в выражении (33).

того, в таком широком классе моделей нельзя сделать предположение о том, что проекция инвестиций на текущий и прошлый доход может быть хорошо аппроксимирована плавным распределенным лагом изменения дохода³⁵.

Еще одна тонкость, связанная с выводом выражения (38), оказывает влияние на получение как строгой, так и расширенной формы акселератора. При выводе формулы (38) эксплуатировался тот факт, что только одномерный случайный шок $\{\theta_t\}$ является препятствием при решении задачи планировщика. При наличии двух и более источников случайного шока вышеупомянутый вывод формулы становится некорректным. Дополнительные источники случайного шока могут быть добавлены в модель (31)–(33) двумя приемлемыми способами. Во-первых, если в предыдущем абзаце θ_t в выражении (32) будет заново интерпретировано как разность $\tau_t - g_t$, если планировщик наблюдает за обоими параметрами τ_t и g_t и если τ_t и g_t соответствуют вероятностным процессам с различными одномерными представлениями со скользящим усреднением, то модель с одним шоком становится некорректной. Во-вторых, если для преференций существуют случайные шоки (например, к функции прибыли за текущий период из (31) добавляется условие $c_t w_t, w_t$), то модель с одним шоком также будет неверной.

Тот факт, что рассмотренные выше положения являются условием для вероятностного процесса $\{c_t, k_{t+1} - k_t, y_{nt}\}$ с одномерным шоком (или «сингулярного» вероятностного процесса), имеет большое значение при доказательстве эмпирического успеха акселератора, в частности при очевидной первопричинности по Грейндже норм произведенной продукции в отношении меры накопления основных фондов. Данное свойство системы будет справедливо для любой спецификации $a(L)$, дающей равновесие с тем свойством, когда $(1 - L)\{c_t, k_{t+1} - k_t, y_{nt}\}$ являются обратимым распределенным лагами одного шока θ_t . Такое равновесное представление с одним порождением и будет являться представлением Вольда. Из такого «сингулярного» представления Вольда следует прямое утверждение, что ни одна переменная не является причиной по Грейндже для любой другой переменной³⁶.

Причинность Грейнджа одной переменной по отношению к другой можно применить, если добавить в модель ошибки измерения. Чтобы проиллюстрировать данную возможность, предположим истинность выражений (37), (38) и (39). Предположим далее, что выход продукции измерен без ошибки, но потребление и основные фонды при этом искажены ковариационными стационарными serially коррелированными ошибками измерения,

³⁵ Аппроксимация при использовании среднеквадратичной метрики может быть хорошо выполнена с помощью достаточно непостоянного распределенного лага в изменении дохода. Для доказательства данного утверждения хорошо подходит математический аппарат Симса (*Sims C. The Role of Approximate Prior Restrictions in Distributed Lag Estimation // Journal of the American Statistical Association. 1972. Vol. 67. P. 169–175*). Пусть y_{nt} представляет собой ковариационный стационарный стохастический процесс. Пусть далее b и a будут суммируемыми с квадратом односторонними бесконечными последовательностями. Рассмотрим процесс $b \times y_{nt}$, где звездочка означает конволюцию. Тогда существует многочлен a , который односторонний и суммируется с квадратом и может быть обращен посредством конволюции вида $a^{-1} \times b \times (y_{nt} - y_{n-1})$ с достаточно хорошей аппроксимацией $b \times y_{nt}$. Здесь a^{-1} означает обратимость в условиях конволюции. Если значения переменных умножить на $\beta^{-0.5t}$ или использовать ограничивающее условие, то вышеупомянутый аргумент можно применить для обработки «граничной нестационарности», выраженной моделью (31), (32) и (33).

³⁶ Данное утверждение доказывается простым примером применения теорем Симса (*Sims C. Money, Income, and Causality // The American Economic Review. 1972. Vol. 62. No 4. P. 540–552*). Вариант данного примера см. также в работе Сарджента (*Sargent T. Macroeconomic Theory. Ch. 11, ex. 8*).

v_{ct} и v_{kt} соответственно. Пусть $\{v_{ct}\}$ и $\{v_{kt}\}$ являются взаимно ортогональными стохастическими процессами, каждый из которых, в свою очередь, ортогонален технологическому шоку θ_t . Пусть измеренные потребление и основные фонды обозначаются соответственно как \bar{c}_t и \bar{k}_t . Тогда, добавляя v_{ct} к правой части выражения (37), а $v_{kt+1} - v_{kt}$ — к правой части выражения (38), получим следующую модель наблюдаемых переменных:

$$\bar{c}_t = \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta L} \right) y_{nt} + v_{ct}, \quad (40)$$

$$\bar{k}_{t+1} - \bar{k}_t = \beta \left(\frac{1 - L}{1 - \beta L} \right) y_{nt} + (v_{kt+1} - v_{kt}), \quad (41)$$

$$y_{nt} = \theta_t + (1 - \beta)(\theta_{t-1} + \theta_{t-2} + \dots). \quad (42)$$

В модели, построенной на основе (40), (41) и (42), акселератор распределенного лага проходит причинный тест Грейнджа. Доход является причиной по Грейндже для измеренного потребления и инвестиций³⁷. Данные утверждения о причинности Грейнджа могут быть доказаны посредством использования выражений (40), (41) и (42) для формулирования представления скользящего среднего Вольда для вектора $(\bar{c}_t, \bar{k}_{t+1} - \bar{k}_t, y_{nt})$. Доказательство легко выводится, если сделать следующие предположения: (42) является одномерным представлением Вольда для y_{nt} ; v_{kt+1} является частью порожденных величин в k_{t+1} , ортогонального процессу θ_t ; v_{ct} представляет собой часть порожденных величин в \bar{c}_t , ортогонального процессу θ_t . Тогда можно сразу же перейти от выражений (40), (41) и (42) к трехпараметрическому представлению скользящего среднего Вольда для $(\bar{c}_t, \bar{k}_{t+1} - \bar{k}_t, y_{nt})$, что подтверждает сделанные ранее утверждения о причинности Грейнджа³⁸.

³⁷ См.: Sims C. Money, Income, and Causality. Условие, что доход является причиной по Грейндже для инвестиций, не выполняется в особом случае, когда $v_{kt+1} - v_{kt}$ представляет собой белый шум. Отметим, что выражения (37), (38) и (39) дают истинным переменным следующее представление скользящего среднего:

$$(1 - L)c_t = (1 - \beta)\theta_t, \quad (1 - L)y_{nt} = (1 - \beta L)\theta_t, \quad k_{t+1} - k_t = \beta\theta_t.$$

Пусть $v_u = v_{kt+1} - v_{kt}$. Тогда получим: $k_{t+1} - k_t = \beta\theta_t + v_u$. Если v_u — белый шум, то $\beta\theta_t + v_u$, очевидно, является фундаментальным белым шумом для $k_{t+1} - k_t$. Трехпараметрическое представление Вольда с $\beta\theta_t + v_u$ в качестве одного из белых шумов может легко быть сформулировано посредством двух теорем Симса, доказывающих, что ни одна наблюдаемая переменная не является причиной по Грейндже для $k_{t+1} - k_t$. Конкретизируя, заметим, что из представления $k_{t+1} - k_t = \beta\theta_t + v_u$ следует, что $E_{t-1}(k_{t+1} - k_t) = 0$, что и доказывает отсутствие причинности Грейнджа для инвестиций.

³⁸ Данная конструкция соответствует случаю, когда ошибка измерения потребления равна ошибке измерения инвестиций со знаком «минус». При этом измеренные параметры потребления и инвестиций суммируются с измеренным доходом. В этом особом случае ковариационная матрица порождения ϵ_u в формуле (4) имеет второй порядок, что равно сумме номеров «индексов» или сигналов (единица, если сигнал равен 1) и количества линейно независимых ошибок измерения (в рассматриваемом случае — одна). Даже при условии сингулярности измеренного процесса для данного примера справедливо, что измеренный доход не вызван по Грейнджею какой-либо другой переменной в системе. Модель, описываемая выражениями (40), (41) и (42), может соответствовать модели Р. Холла (*Hall R. Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence*) для «излишней чувствительности потребления к доходу», что было показано в работах М. Флавина (*Flavin M. The Adjustment of Consumption to Changing Expectations about Future Income // The Journal of Political Economy*. 1981. Vol. 89. No 5. P. 974—1009; *Flavin M. Excess Sensitivity of Consumption to Current Income: Liquidity Constraints or Myopia? // Canadian Journal of Economics*, 1985. Vol. 18. No 1. P. 117—136). В более общем случае ниже приведенные расчеты иллюстрируют первую модель сообщаемых данных, которая может соответствовать наблюдениям Флавина и теории Холла с учетом предположений о порядке колебаний ошибок измерения.

Если y_{nt} также измеряется с ошибкой, так что каждая из переменных c_t , $k_{t+1} - k_t$ и y_{nt} получаетсяискаженными ошибками измерения, то в общем случае каждая измеренная серия будет являться причиной по Грейндже для другой. Степень причинности Грейндже от одной серии к другой, в соответствии с измерениями посредством разложения дисперсии ошибок прогнозирования на j шагов вперед³⁹, будет зависеть от относительной дисперсии ошибок измерения. В модели с одним общим индексом, подобной рассматриваемой нами модели (общим индексом является θ_t), лучше всего измеренные переменные будут представлять причинность по Грейндже для серий, измеренных с меньшей степенью достоверности, и наоборот.

Чтобы доказать сделанные утверждения для случая, когда каждый из параметров c_t , $k_{t+1} - k_t$ и y_{nt} измеряется с ошибками, необходимо вывести представление скользящего среднего Вольда для всех измеренных серий. При этом можно воспользоваться рекурсивными методами, рассмотренными в разделе 2. Далее будут представлены и рассмотрены результаты расчетов для особого численного примера модели (31), (32), (33) и (34).

Параметры экономической модели и модели измерений приведены в табл. 1. Предположим, что информационное агентство накапливает искаженные ошибками данные об измерениях y_{nt} , c_t и $k_{t+1} - k_t$. Далее предположим, что θ_t — белый шум. Тогда экономическая модель и измерения легко сводятся к представлению в пространстве состояний, рассмотренному в разделе 2. Состояние системы можно описать выражением $x_t = (k_t, \theta_t)$. Тогда истинные данные y_{nt} , c_t и $k_{t+1} - k_t$ являются линейными функциями состояния.

Таблица 1

Параметры моделей ошибок измерения

Экономическая модель:

$$\beta = (1,05)^{-1}, E\theta_t^2 = 1, \theta_t — \text{белый шум}$$

Процесс ошибки измерения:

Ошибка измерения дохода (y_t):

$$v_{yt} = 0,6v_{yt-1} + v_{yt}, \text{ среднеквадратичное отклонение } (v_{yt}) = 0,050$$

Ошибка измерения дохода (c):

$$v_{ct} = 0,7v_{ct-1} + v_{ct}, \text{ среднеквадратичное отклонение } (v_{ct}) = 0,035$$

Ошибка измерения инвестиций $k_{t+1} - k_t$:

$$v_{it} = 0,3v_{it-1} + v_{it}, \text{ среднеквадратичное отклонение } (v_{it}) = 0,650$$

(v_{yt}, v_{ct}, v_{it}) являются взаимно ортогональными белыми шумами с дисперсией, соответствующей вышеуказанным среднеквадратичным отклонениям v_{yt} , v_{ct} и v_{it}

(v_{yt}, v_{ct}, v_{it}) ортогональны θ_t

В табл. 2 приведена импульсная передаточная функция истинных данных по отношению к возмущению в шуме в рамках экономической модели. В таблице точно отражено сглаживающее свойство для потребления, аналитически рассмотренное в сноске 15.

В табл. 3 приведено разложение совокупности значений дисперсии для дисперсии ошибки прогнозирования на j шагов вперед, связанной с представлением Вольда для измеренных данных. С помощью операций, соответствующих рассмотренным Симсом⁴⁰, ортогоанализируем порожденные величины

³⁹ См. описание «порождающего представления» в работе Симса (*Sims C. Macroeconomics and Reality // Econometrica. 1980. Vol. 48. January. P. 1–48*).

⁴⁰ Ibid.

Таблица 2

Импульсная передаточная функция y_{nt} , c_t и $k_{t+1} - k_t$ для порожденных величин в Θ_t
 $(\beta = 1,05^{-1}, \beta f = 1)$

| Лаг | y_n | c_t | $k_{t+1} - k_t$ |
|-----|--------|--------|-----------------|
| 0 | 1,0 | 0,0476 | 0,9524 |
| 1 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 2 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 3 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 4 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 5 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |

начиная с y_{nt} , затем c_t и завершая $k_{t+1} - k_t$, согласно разложению Холецкого для ковариационных матриц порожденных величин. Ковариационная матрица порожденных величин в измеренных данных и ее собственные значения приведены в частях Г и Д табл. 3.

Таблица 3

Разложение дисперсии ошибки прогнозирования на j шагов вперед
 в отношении измеренных данных

| j | y_n | c_t | $k_{t+1} - k_t$ |
|---|--------|--------|-----------------|
| А. Дисперсия соответствует порожденной величине в y_n | | | |
| 1 | 1,0057 | 0,0023 | 0,9036 |
| 2 | 1,0083 | 0,0045 | 0,9036 |
| 3 | 1,0108 | 0,0068 | 0,9036 |
| 4 | 1,0131 | 0,0090 | 0,9036 |
| 5 | 1,0155 | 0,0113 | 0,9036 |
| 6 | 1,0178 | 0,0135 | 0,9036 |
| 7 | 1,0201 | 0,0158 | 0,9036 |
| 8 | 1,0223 | 0,0181 | 0,9036 |
| 9 | 1,0246 | 0,0203 | 0,9036 |
| 10 | 1,0269 | 0,0226 | 0,9036 |
| 11 | 1,0291 | 0,0248 | 0,9036 |
| 12 | 1,0314 | 0,0271 | 0,9036 |
| 13 | 1,0337 | 0,0294 | 0,9036 |
| 14 | 1,0359 | 0,0316 | 0,9036 |
| 15 | 1,0382 | 0,0339 | 0,9036 |
| 16 | 1,0404 | 0,0361 | 0,9036 |
| 17 | 1,0427 | 0,0384 | 0,9036 |
| 18 | 1,0450 | 0,0407 | 0,9036 |
| 19 | 1,0472 | 0,0429 | 0,9036 |
| 20 | 1,0495 | 0,0452 | 0,9036 |
| Б. Дисперсия соответствует порожденной величине в c_t | | | |
| 1 | 0 | 0,0025 | 0 |
| 2 | 0 | 0,0037 | 0 |
| 3 | 0 | 0,0044 | 0 |
| 4 | 0 | 0,0047 | 0 |
| 5 | 0 | 0,0049 | 0 |
| 6 | 0 | 0,0050 | 0 |
| 7 | 0 | 0,0051 | 0 |
| 8 | 0 | 0,0051 | 0 |
| 9 | 0 | 0,0052 | 0 |
| 10 | 0 | 0,0052 | 0 |
| 11 | 0 | 0,0052 | 0 |

Окончание таблицы 3

| j | y_n | c_t | $k_{t+1} - k_t$ |
|---|--------|--------|-----------------|
| 12 | 0,0001 | 0,0052 | 0 |
| 13 | 0,0001 | 0,0052 | 0 |
| 14 | 0,0001 | 0,0052 | 0 |
| 15 | 0,0001 | 0,0053 | 0 |
| 16 | 0,0001 | 0,0053 | 0 |
| 17 | 0,0001 | 0,0053 | 0 |
| 18 | 0,0001 | 0,0053 | 0 |
| 19 | 0,0001 | 0,0053 | 0 |
| 20 | 0,0001 | 0,0053 | 0 |
| В. Дисперсия соответствует порожденной величине в Δk | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0,4682 |
| 2 | 0 | 0 | 0,5096 |
| 3 | 0 | 0 | 0,5133 |
| 4 | 0 | 0 | 0,5136 |
| 5 | 0 | 0 | 0,5136 |
| 6 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 7 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 8 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 9 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 10 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 11 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 12 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 13 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 14 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 15 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 16 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 17 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 18 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 19 | 0 | 0 | 0,5137 |
| 20 | 0 | 0 | 0,5137 |
| Г. Ковариационная матрица порожденных величин в измеренных данных для y_n , c_t и $k_{t+1} - k_t$ | | | |
| | 1,0057 | 0,0476 | 0,9533 |
| | 0,0476 | 0,0047 | 0,0453 |
| | 0,9533 | 0,0453 | 1,3718 |
| Д. Собственные значения ковариационной матрицы порожденных величин в измеренных данных для y_n , c_t и $k_{t+1} - k_t$ | | | |
| | | 0,0024 | |
| | | 0,2183 | |
| | | 2,1614 | |

Табл. 3 представляет собой схему, по которой порожденные величины в y_{nt} учитываются в действительных пропорциях ошибок прогнозирования на j шагов вперед в c_t и $k_{t+1} - k_t$, но не наоборот. Порожденные величины, как в c_t , так и в $k_{t+1} - k_t$, главным образом имеют вес в дисперсии собственных ошибок прогнозирования. Данные выводы некоторым незначительным образом подвергаются коррекции при изменении порядка ортогонализации, когда на первое место ставится c_t (результаты такой перестановки здесь не приводятся).

Также из табл. 3 видно, что условие причинности Грейнджа, выраженное граничной системой (40), (41) и (42), в которой доход измерен без ошибок, остается приблизительно справедливым для системы, в которой

доход измеряется с ошибками, но при этом остается наилучшим образом измеренной переменной. Данный вывод подтверждается также табл. 4, в которой приведены представления Вольда для $(y_n, c_t, k_{t+1} - k_t)$ с неортогонализированными порожденными величинами. Набор коэффициентов достаточно

Таблица 4
Импульсная передаточная функция измеренных данных (представление Вольда)

| j | y_n | c_t | $k_{t+1} - k_t$ |
|---|---------|--------|-----------------|
| А. Отклик на одну порожденную величину среднеквадратичного отклонения в y_n | | | |
| 0 | 1,0029 | 0 | 0 |
| 1 | 0,0578 | 0,0134 | -0,2809 |
| 2 | 0,0526 | 0,0228 | -0,0843 |
| 3 | 0,0494 | 0,0294 | -0,0253 |
| 4 | 0,0475 | 0,0340 | -0,0076 |
| 5 | 0,0464 | 0,0372 | -0,0023 |
| 6 | 0,0457 | 0,0394 | -0,0007 |
| 7 | 0,0453 | 0,0410 | -0,0002 |
| 8 | 0,0451 | 0,0421 | -0,0001 |
| 9 | 0,0449 | 0,0429 | 0 |
| 10 | 0,0448 | 0,0434 | 0 |
| 11 | 0,0448 | 0,0438 | 0 |
| 12 | 0,0447 | 0,0441 | 0 |
| 13 | 0,0447 | 0,0443 | 0 |
| Б. Отклик на одну порожденную величину среднеквадратичного отклонения в c_t | | | |
| 0 | 0 | 0,0686 | 0 |
| 1 | -0,0025 | 0,0492 | -0,0020 |
| 2 | 0 | 0,0356 | -0,0006 |
| 3 | 0,0015 | 0,0261 | -0,0002 |
| 4 | 0,0025 | 0,0194 | -0,0001 |
| 5 | 0,0030 | 0,0147 | 0 |
| 6 | 0,0033 | 0,0115 | 0 |
| 7 | 0,0035 | 0,0092 | 0 |
| 8 | 0,0037 | 0,0076 | 0 |
| 9 | 0,0037 | 0,0064 | 0 |
| 10 | 0,0038 | 0,0057 | 0 |
| 11 | 0,0038 | 0,0051 | 0 |
| 12 | 0,0038 | 0,0047 | 0 |
| 13 | 0,0038 | 0,0045 | 0 |
| В. Отклик на одну порожденную величину среднеквадратичного отклонения в Δk | | | |
| 0 | 0 | 0 | 1,1712 |
| 1 | -0,0063 | 0,0001 | 0,3481 |
| 2 | -0,0037 | 0,0001 | 0,1044 |
| 3 | -0,0021 | 0,0002 | 0,0313 |
| 4 | -0,0012 | 0,0002 | 0,0094 |
| 5 | -0,0006 | 0,0002 | 0,0028 |
| 6 | -0,0003 | 0,0002 | 0,0008 |
| 7 | -0,0001 | 0,0002 | 0,0003 |
| 8 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0001 |
| 9 | 0,0001 | 0,0002 | 0 |
| 10 | 0,0002 | 0,0002 | 0 |
| 11 | 0,0002 | 0,0002 | 0 |
| 12 | 0,0002 | 0,0002 | 0 |
| 13 | 0,0002 | 0,0002 | 0 |

близко аппроксимирует набор нулей, что характеризует ситуацию, когда причинность по Грейнджею переходит с y_n на c и $k_{t+1} - k_t$, но не наоборот⁴¹.

Приведенные значения иллюстрируют, как первая модель информационного агентства в сочетании с экономической моделью с одним индексом предлагает объяснение тенденций акселерационных расчетов с целью прохождения причинных тестов Грейнджа. Рассмотрим, что изменится в случае использования второй модели измеряющего агентства.

В табл. 5 представлено разложение дисперсии ошибки прогнозирования на j шагов вперед в отношении оптимально отфильтрованных данных для y_{nt} , c_t и $k_{t+1} - k_t$. Отметим, что ковариационная матрица порожденных величин является практически сингулярной, с одним преобладающим собственным значением. Это означает, что мы близки к ситуации, когда система подвергается только одному шоку в отношении отфильтрованных данных (аналогично системе, управляющей *истинными* данными), что подтверждается разложением значений дисперсии ошибки прогнозирования на j шагов вперед в табл. 5. Первое порождение соответствует практически всем значениям дисперсии ошибки прогнозирования для *всех* переменных.

В табл. 6 представлены распределения Вольда для отфильтрованных данных, с порожденные величинами, ортогонализированными посредством разложения Холецкого, что соответствует порядку переменных вида y_{nt} , c_t и $k_{t+1} - k_t$ ⁴². Представление Вольда характеризуется одним преобладающим шумом. Второй и третий шумы при этом близки к нулевым коэффициентам для всех переменных. Отметим, что скользящее усреднение, соответствующее первому шуму для отфильтрованных данных, достаточно близко аппроксирует импульсную передаточную функцию для истинных данных в качестве

Таблица 5

**Разложение дисперсии ошибки прогнозирования на j шагов вперед
в отношении отфильтрованных данных для y_{nt} , c_t и $k_{t+1} - k_t$**

| j | y_n | c_t | $k_{t+1} - k_t$ |
|---|--------|--------|-----------------|
| А. Дисперсия соответствует порожденной величине в y_n | | | |
| 1 | 0,9945 | 0,0023 | 0,9019 |
| 2 | 0,9968 | 0,0045 | 0,9019 |
| 3 | 0,9991 | 0,0068 | 0,9019 |
| 4 | 1,0014 | 0,009 | 0,9019 |
| 5 | 1,0036 | 0,0113 | 0,9019 |
| 6 | 1,0058 | 0,0136 | 0,9019 |
| 7 | 1,0081 | 0,0158 | 0,9019 |
| 8 | 1,0104 | 0,0181 | 0,9019 |
| 9 | 1,0126 | 0,0204 | 0,9019 |
| 10 | 1,0149 | 0,0226 | 0,9019 |
| 11 | 1,0171 | 0,0249 | 0,9019 |
| 12 | 1,0194 | 0,0271 | 0,9019 |
| 13 | 1,0217 | 0,0294 | 0,9019 |
| 14 | 1,0239 | 0,0317 | 0,9019 |
| 15 | 1,0262 | 0,0339 | 0,9019 |
| 16 | 1,0285 | 0,0362 | 0,9019 |
| 17 | 1,0307 | 0,0385 | 0,9019 |
| 18 | 1,0330 | 0,0407 | 0,9019 |
| 19 | 1,0352 | 0,043 | 0,9019 |
| 20 | 1,0375 | 0,0452 | 0,9019 |

⁴¹ Sims C. Money, Income, and Causality.

⁴² Sims C. Macroeconomics and Reality // Econometrica. 1980. Vol. 48. January. P. 1—48.

Окончание таблицы 5

| <i>j</i> | <i>y_n</i> | <i>c_t</i> | <i>k_{t+1} - k_t</i> |
|---|----------------------|----------------------|--|
| Б. Дисперсия соответствует порожденной величине в <i>c</i> * | | | |
| 1 | 0 | 0,0058 | 0,0058 |
| 2 | 0,0058 | 0,0116 | 0,0058 |
| 3 | 0,0116 | 0,0174 | 0,0058 |
| 4 | 0,0174 | 0,0231 | 0,0058 |
| 5 | 0,0231 | 0,0289 | 0,0058 |
| 6 | 0,0289 | 0,0347 | 0,0058 |
| 7 | 0,0347 | 0,0405 | 0,0058 |
| 8 | 0,0405 | 0,0463 | 0,0058 |
| 9 | 0,0463 | 0,0521 | 0,0058 |
| 10 | 0,0521 | 0,0578 | 0,0058 |
| 11 | 0,0578 | 0,0636 | 0,0058 |
| 12 | 0,0636 | 0,0694 | 0,0058 |
| 13 | 0,0694 | 0,0752 | 0,0058 |
| 14 | 0,0752 | 0,0810 | 0,0058 |
| 15 | 0,0810 | 0,0868 | 0,0058 |
| 16 | 0,0868 | 0,0925 | 0,0058 |
| 17 | 0,0925 | 0,0983 | 0,0058 |
| 18 | 0,0983 | 0,1041 | 0,0058 |
| 19 | 0,1041 | 0,1099 | 0,0058 |
| 20 | 0,1099 | 0,1157 | 0,0058 |
| В. Дисперсия соответствует порожденной величине в <i>Δk</i> * | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0,3000 |
| 2 | 0,0333 | 0,0333 | 0,3000 |
| 3 | 0,0667 | 0,0667 | 0,3000 |
| 4 | 0,1000 | 0,1000 | 0,3000 |
| 5 | 0,1333 | 0,1333 | 0,3000 |
| 6 | 0,1667 | 0,1667 | 0,3000 |
| 7 | 0,2000 | 0,2000 | 0,3000 |
| 8 | 0,2333 | 0,2333 | 0,3000 |
| 9 | 0,2667 | 0,2667 | 0,3000 |
| 10 | 0,3000 | 0,3000 | 0,3000 |
| 11 | 0,3333 | 0,3333 | 0,3000 |
| 12 | 0,3667 | 0,3667 | 0,3000 |
| 13 | 0,4000 | 0,4000 | 0,3000 |
| 14 | 0,4333 | 0,4333 | 0,3000 |
| 15 | 0,4667 | 0,4667 | 0,3000 |
| 16 | 0,5000 | 0,5000 | 0,3000 |
| 17 | 0,5333 | 0,5333 | 0,3000 |
| 18 | 0,5667 | 0,5667 | 0,3000 |
| 19 | 0,6000 | 0,6000 | 0,3000 |
| 20 | 0,6333 | 0,6333 | 0,3000 |
| Г. Ковариационная матрица порожденных величин в отфильтрованных данных для <i>y_n</i> , <i>c_t</i> и <i>k_{t+1} - k_t</i> | | | |
| | 0,9945 | 0,0474 | 0,9471 |
| | 0,0474 | 0,0023 | 0,0452 |
| | 0,9471 | 0,0452 | 0,9019 |
| Д. Собственные значения ковариационной матрицы порожденных величин в отфильтрованных данных для <i>y_n</i> , <i>c_t</i> и <i>k_{t+1} - k_t</i> | | | |
| | | 1,898723 | |
| | | 0 | |
| | | 0,000009 | |

* Все значения в части Б умножены на 10^{-3} . Все значения в части В умножены на 10^{-10} .

Таблица 6

Представление Вольда отфильтрованных данных для y_n , c_t и $k_{t+1} - k_t$

| j | y_n | c_t | $k_{t+1} - k_t$ |
|--|---------|---------|-----------------|
| А. Отклик на одну порожденную величину среднеквадратичного отклонения в y_n | | | |
| 0 | 0,9973 | 0,0476 | 0,9497 |
| 1 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 2 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 3 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 4 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 5 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 6 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 7 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 8 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 9 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 10 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 11 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 12 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| 13 | 0,0476 | 0,0476 | 0 |
| Б. Отклик на одну порожденную величину среднеквадратичного отклонения в c_t | | | |
| 0 | 0 | 0,0024 | -0,0024 |
| 1 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 2 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 3 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 4 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 5 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 6 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 7 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 8 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 9 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 10 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 11 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 12 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| 13 | 0,0024 | 0,0024 | 0 |
| С. Отклик на одну порожденную величину среднеквадратичного отклонения в Δk^* | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0,5477 |
| 1 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 2 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 3 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 4 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 5 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 6 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 7 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 8 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 9 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 10 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 11 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 12 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |
| 13 | -0,1826 | -0,1826 | 0 |

* Все значения в части Б умножены на 10^{-5} .

отклика на порождение шока целевых капиталов θ , (см. табл. 2). Близкая аппроксимация представления Вольда из табл. 6 к импульсной передаточной функции из табл. 2 указывает на достаточно точную имитацию истинных данных отфильтрованными. В числе прочего установленная взаимосвязь означает, что в контексте настоящего времени вторая модель измерений не может объяснить условие, которое частично интерпретируется как эмпирический успех акселератора: тенденция дохода или выпуска продукции становится причиной Грейнджа для инвестиций, но не наоборот.

Вышеприведенные заключения об очень высоком соответствии отфильтрованных и истинных данных подтверждаются воспроизведением системы длиной 80 периодов. На рис. 1—3 представлены графики истинных и измеренных значений потребления, инвестиций и дохода соответственно. Также на графиках можно увидеть предполагаемый порядок дисперсий ошибки измерения. На рис. 4—7 также показаны истинные и отфильтрованные потребление, инвестиции, доход и основные фонды соответственно. Следует отметить, насколько близки серии истинных и измеренных данных в каждом случае. Корреляционная матрица для истинных, измеренных и отфильтрованных данных, полученных в результате моделирования, приведена в табл. 7.

Таблица 7

| А. Ковариационная матрица истинного, измеренного и отфильтрованного потребления | | |
|---|--------|--------|
| 0,0141 | 0,0155 | 0,0141 |
| 0,0155 | 0,0205 | 0,0156 |
| 0,0141 | 0,0156 | 0,0142 |
| Б. Корреляционная матрица истинного, измеренного и отфильтрованного потребления | | |
| 1 | 0,9092 | 0,9966 |
| 0,9092 | 1 | 0,9129 |
| 0,9966 | 0,9129 | 1 |
| В. Ковариационная матрица истинных, измеренных и отфильтрованных инвестиций | | |
| 0,8942 | 0,889 | 0,8939 |
| 0,8890 | 1,3609 | 0,8882 |
| 0,8939 | 0,8882 | 0,8981 |
| Г. Корреляционная матрица истинных, измеренных и отфильтрованных инвестиций | | |
| 1 | 0,8058 | 0,9974 |
| 0,8958 | 1 | 0,8034 |
| 0,9974 | 0,8034 | 1 |
| Д. Ковариационная матрица истинного, измеренного и отфильтрованного дохода | | |
| 0,9667 | 0,9713 | 0,9646 |
| 0,9713 | 0,9813 | 0,9744 |
| 0,9646 | 0,9744 | 0,9677 |
| Е. Корреляционная матрица истинного, измеренного и отфильтрованного дохода | | |
| 1 | 0,9972 | 0,9973 |
| 0,9972 | 1 | 0,9999 |
| 0,9973 | 0,9999 | 1 |
| Ж. Ковариационная матрица истинных и отфильтрованных основных фондов | | |
| 5,3672 | 5,4112 | 5,4112 |
| 5,4112 | 5,4894 | 5,4894 |
| З. Корреляционная матрица истинных и отфильтрованных основных фондов | | |
| 1 | 0,9969 | 0,9969 |
| 0,9969 | 1 | 1 |

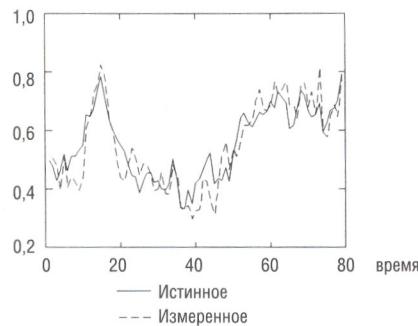


Рис. 1. Истинное и измеренное потребление

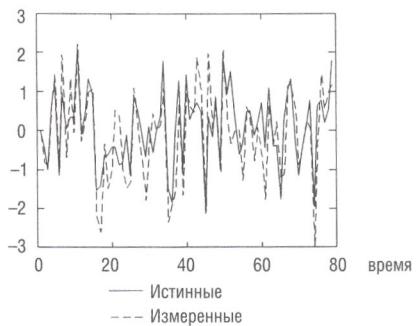


Рис. 2. Истинные и измеренные инвестиции

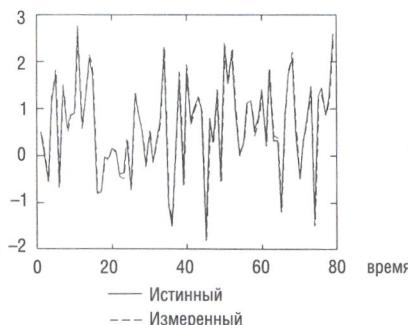


Рис. 3. Истинный и измеренный доход

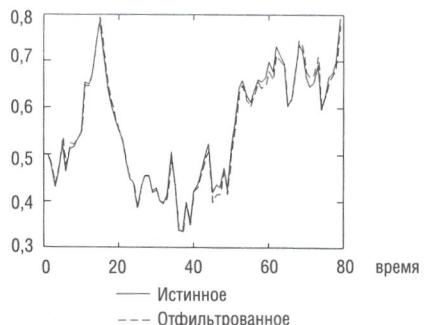


Рис. 4. Истинное и отфильтрованное потребление

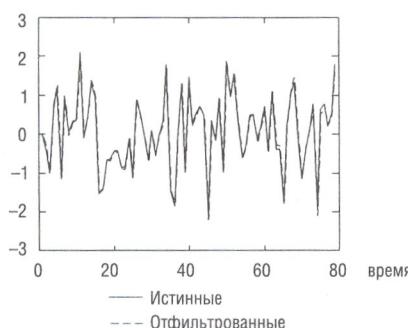


Рис. 5. Истинные и отфильтрованные инвестиции

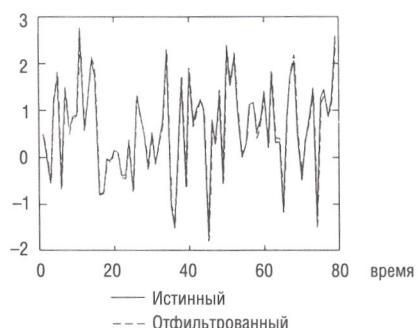


Рис. 6. Истинный и отфильтрованный доход



Рис. 7. Истинные и отфильтрованные основные фонды

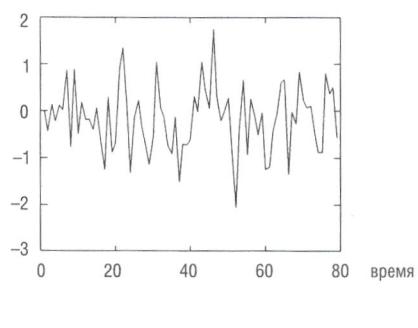


Рис. 8. Измеренное потребление плюс инвестиции минус доход

Полагаем, что ошибки измерения потребления и инвестиций обладают свойством ортогональности. Это означает, что измеренные инвестиции и потребление не могут быть суммированы с измеренным доходом, что иллюстрирует рис. 8. На рис. 9 показано, как отфильтрованные данные по потреблению и инвестициям могут быть суммированы с отфильтрованными данными по доходу. При этом с помощью оптимального фильтра нетрудно получить тождественность ВНП.

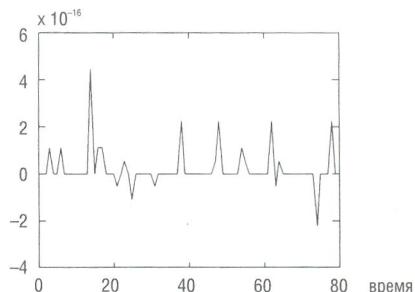


Рис. 9. Отфильтрованное потребление
плюс инвестиции минус доход

Заключение

Существует множество других моделей измерений. Даже если оставить базовую структуру двух рассмотренных в настоящей работе моделей и далее предположить, что измерения, собранные агентством, соответствуют классическим предположениям ортогональности ошибок в переменных, мы сможем сформулировать и другие дополнительные модели для «фильтрующего» свойства информационного агентства. В настоящей работе рассмотрен особый (и реалистичный) случай, предполагающий, что информационному агентству поставлена в соответствие корректная модель (то есть модель экономиста, которому требуется вычислить функцию правдоподобия). При этом очевидно, что было бы возможно разработать аналогичные вышеописанным процедуры, которые были бы справедливы для случаев, когда информационное агентство фильтрует данные с помощью неверно выбранной модели. Это привело бы к эконометрическим характеристикам, порождающим параметры, связанные с рассмотренными в настоящей работе свойствами, поскольку функция правдоподобия содержала бы параметры, описывающие неверную модель информационного агентства, в дополнение к параметрам, описывающим экономическую модель и процессы ошибок измерения, присутствующие в определении функций правдоподобия обеих моделей.

Приложение А

Фильтр Кальмана

Рассмотрим систему в пространстве состояний:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{Ax}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t,$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Cx}_t + \mathbf{w}_t,$$

где: \mathbf{x}_t — вектор $n \times 1$, $\boldsymbol{\epsilon}_t$ — вектор $n \times 1$, \mathbf{y}_t — вектор $k \times 1$, \mathbf{w}_t — вектор $k \times 1$, \mathbf{A} — матрица $n \times n$, \mathbf{C} — матрица $k \times n$, $\boldsymbol{\epsilon}_t$ и \mathbf{w}_t представляют собой векторный белый шум, для которого:

$$E\boldsymbol{\epsilon}_t\boldsymbol{\epsilon}'_t = \mathbf{Q},$$

$$E\mathbf{w}_t\mathbf{w}'_t = \mathbf{R},$$

$$E\boldsymbol{\epsilon}_t\mathbf{w}'_t = \mathbf{W}.$$

Каждая из матриц \mathbf{Q} и \mathbf{R} является положительно полуопределенной. Определим матрицу \mathbf{S} как уникальную положительно полуопределенную матрицу, которая удовлетворяет алгебраическому уравнению Рикката:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}' - (\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{C}' + \mathbf{W})(\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}')^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{A}' + \mathbf{W}'). \quad (\text{A1})$$

По матрице \mathbf{S} определим \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{C}' + \mathbf{W})(\mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}' + \mathbf{R})^{-1}. \quad (\text{A2})$$

Методы решения уравнений (A1) и (A2) для матриц \mathbf{S} и \mathbf{K} рассмотрены в работе Андерсона и Мура⁴³. В настоящей статье обозначим решения уравнений (A1) и (A2) функцией вида:

$$[\mathbf{K}, \mathbf{S}] = \text{kfilter}(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{W}).$$

Приложение Б

Сериально коррелированные ошибки измерений

Расчеты, приведенные в разделе 2, справедливы лишь для случая, когда процессы ошибок измерения являются авторегрессионными процессами первого порядка. В данном приложении показано, как изменить расчеты с тем, чтобы сделать ошибку измерения авторегрессионным процессом произвольного конечного порядка. Данное условие может быть достигнуто посредством увеличения вектора состояний ошибки измерения \mathbf{v}_t , включая запаздывающие значения самих ошибок измерения и соответствующим образом определенную матрицу \mathbf{D} с подматрицами в качестве сопровождающих матриц. Преобразуем выражение наблюдателя до вида:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{Cx}_t + \mathbf{Hv}_t,$$

где \mathbf{H} — селекторная матрица, которая отбирает текущие значения ошибок измерения, игнорируя при этом остальные. В качестве примера предположим, что имеется одномерная ошибка измерений v_{1t} , которую рассмотрим в виде авторегрессионного процесса второго порядка:

$$v_{1t} = \delta_1 v_{1t-1} + \delta_2 v_{1t-2} + \nu_{1t}.$$

Предположим, что v_{1t} — единственная ошибка измерений в системе. Тогда получим:

$$\mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{1t-1} \end{pmatrix}.$$

Запишем:

$$\mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{D}\mathbf{v}_t + \nu_t,$$

где

$$\mathbf{D}_t = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} v_{1t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что в системе имеется одна измеренная переменная $\mathbf{z}_t = \mathbf{Cx}_t + v_{1t}$. Выразим данную переменную как $\mathbf{z}_t = \mathbf{Cx}_t + \mathbf{Hv}_t$, где $\mathbf{H} = [1 \ 0]$.

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{Ax}_t + \epsilon_t, \\ \mathbf{z}_t &= \mathbf{Cx}_t + \mathbf{Hv}_t, \\ \mathbf{v}_{t+1} &= \mathbf{D}\mathbf{v}_t + \nu_t, \end{aligned} \quad (\text{Б1})$$

где \mathbf{x}_t — вектор $n \times 1$, \mathbf{z}_t — вектор $k \times 1$, \mathbf{y}_t — вектор $m \times 1$, а матрицы \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{H} и \mathbf{D} соответствуют объектам, с которыми они появляются. Пусть ϵ_t и ν_t представляют собой белый шум, для которого $E\epsilon_t\epsilon_t' = \mathbf{Q}$, $E\nu_t\nu_t' = \mathbf{R}$, а $E\epsilon_t\nu_s' = 0$ для всех t и s .

⁴³ Anderson B., Moore J. Optimal Filtering.

Отметим, что

$$\bar{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{D}\mathbf{z}_t = (\mathbf{CA} - \mathbf{DC})\mathbf{x}_t + (\mathbf{C}\epsilon_t + \mathbf{H}\nu_t) + (\mathbf{HD} - \mathbf{DH})\mathbf{v}_t. \quad (B2)$$

Объединим выражения (B1) и (B2), чтобы получить систему в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{v}_{t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{v}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{\epsilon}_t \\ \mathbf{\nu}_t \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{z}} &= [\mathbf{CA} - \mathbf{DC}, \mathbf{HD} - \mathbf{DH}] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{v}_t \end{pmatrix} + (\mathbf{C}\epsilon_t + \mathbf{H}\nu_t). \end{aligned} \quad (B3)$$

Состояние системы определяется как $(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t)$. Тогда ковариационная матрица для состояния шума примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix}.$$

Ковариационная матрица наблюдаемого шума $\mathbf{C}\epsilon_t + \mathbf{H}\nu_t$ определяется как $\mathbf{CQC}' + \mathbf{HRH}'$. Ковариация между состоянием шума и наблюдаемым шумом будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{H} & \mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

Чтобы получить порождающее представление для системы (B3), рассчитаем

$$[\mathbf{K}_3, \mathbf{S}_3] = \text{kfilter}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}, [\mathbf{CA} - \mathbf{DC}, \mathbf{HD} - \mathbf{DH}], \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix}, \mathbf{CQC}' + \mathbf{HRH}', \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{H} & \mathbf{R} \end{bmatrix}\right).$$

Тогда порождающее представление для (B3) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t+1} \\ \hat{\mathbf{v}}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_t \\ \hat{\mathbf{v}}_t \end{bmatrix} + \mathbf{K}_3 \mathbf{u}_t,$$

где

$$\bar{\mathbf{z}} = [\mathbf{CA} - \mathbf{DC}, \mathbf{HD} - \mathbf{DH}] \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_t \\ \hat{\mathbf{v}}_t \end{pmatrix} + \mathbf{u}_t,$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_t \\ \hat{\mathbf{v}}_t \end{bmatrix} = E \left[\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{v}_t \end{bmatrix} \mid \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \dots, \mathbf{z}_0, \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{v}}_0 \end{bmatrix} \right],$$

$$\mathbf{S}_3 = E \left(\frac{\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t}{\mathbf{v}_t - \hat{\mathbf{v}}_t} \right) \left(\frac{\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t}{\mathbf{v}_t - \hat{\mathbf{v}}_t} \right)',$$

$$\mathbf{u}_t = \bar{\mathbf{z}}_t - E[\bar{\mathbf{z}}_t \mid \bar{\mathbf{z}}_{t-1}, \dots, \bar{\mathbf{z}}_0, \hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{v}}_0].$$